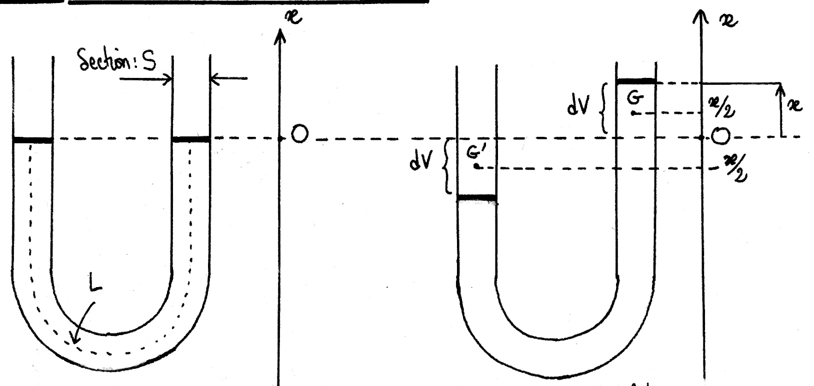
EXM3.12 Oscillations dans un tube en U



Liquide au repos

Énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{pe}$ de TOUT le liquide

$\xrightarrow{\text{perturbation}}$

Liquide hors équilibre

Énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p$ de TOUT le liquide

Le liquide étant un fluide incompressible, sa longueur L est constante

→ lorsque la surface libre du tube de droite se soulève de $+x$,
la surface libre du tube de gauche s'abaisse de $-x$

→ Tout se passe comme si on avait "enlevé" un volume $dV = Sx$ de liquide dans le tube de gauche pour l'élever d'une hauteur $h = \frac{x}{2} - \left(-\frac{x}{2}\right) = x$ et le placer dans le tube de droite :

$$\text{ainsi } \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{pe} + \mu dV g \frac{x}{2} - \left(\mu dV g \left(-\frac{x}{2}\right)\right)$$

d'où $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{pe} + \mu S g x^2$

Expression de l'énergie cinétique de tout le liquide : puisque $L = cte$ cela signifie que chaque point du liquide est animé de la même vitesse, donc de la vitesse d'1 point de la surface libre, soit $|\dot{x}|$

d'où $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$ où M note la masse de tout le liquide : $M = SL\mu$

d'où $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\mu S L \dot{x}^2 + \mu S g x^2 + \mathcal{E}_{pe} = cte$ car $d\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = 0$
(aucun φ^N dissipatifs)

$\frac{d}{dt}$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\cancel{\mu S} L \cancel{2} \dot{x}\ddot{x} \cancel{\dot{x}} + \cancel{\mu S} g \, 2 \cancel{\dot{x}} x = 0 \quad \text{(puisque } \dot{x} \neq 0 \text{ hors équilibre)}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{2g}{L} x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}}$$

Cl : $x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$: la surface libre effectue des oscillations sinusoïdales de période

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{2g}} = \pi\sqrt{\frac{2L}{g}}}$$