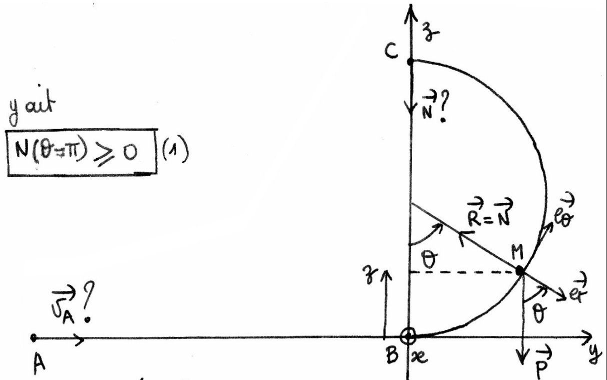
EXM3-11

1) • Si M arrive en C, cela suppose qu'il y ait contact de M sur le support soit : $\boxed{N(\theta=\pi)\geq 0}$ (1)

• Il faut donc exprimer N en fonction de θ.

• Pour cela, appliquons le PFD à {M} ds R_T supposé galiléen.



$$m\,\vec{a}_{M/R_T} = \vec{P} + \vec{R}$$

soit, lorsque M est sur la portion $\widehat{BC}$: $m\begin{vmatrix}\cancel{\ddot r} - r\dot\theta^2 \\ r\ddot\theta + 2\cancel{\dot r}\dot\theta \\ \cancel{\ddot x}\end{vmatrix}_{(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_x})} = \begin{vmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \\ 0\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -N \\ 0 \\ 0\end{vmatrix}$ avec $N=\|\vec{R}\|$

d'où, en projection selon $\vec{e_r}$: $-mR\dot\theta^2 = mg\cos\theta - N$ soit $\boxed{N = mg\cos\theta + mR\dot\theta^2}$ (2)

• Rque : Cette relation (2) est valable qu'il y ait des frottement ($\vec{R} = -N\vec{e_r} - f\vec{e_\theta}$) ou pas ($\vec{R} = -N\vec{e_r}$)
↳ Il faudra s'en souvenir à la question 2)

• Or, sur la portion $\widehat{BC}$, le mouvement est circulaire, donc $\vec{v} = R\dot\theta\,\vec{e_\theta}$, et donc $\boxed{R\dot\theta^2 = \frac{v^2}{R}}$ (3)

• Pour faire apparaître v^2, il suffit d'appliquer le Thm de l'E_k entre M et un autre point. Comme nous cherchons v_A (N'oublions pas ce que nous cherchons !), on va appliquer le Thm de l'E_k entre A et M :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \cancel{W(\vec{P})_{A\to B}} + W(\vec{P})_{B\to M} + \cancel{W(\vec{R})} = +mg(\cancel{z_B} - z_M) = -mgz$$

en prenant B comme origine du repère d'espace (Bxyz) -

d'où, comme $z = R(1-\cos\theta)$:

$$\boxed{m\frac{v^2}{R} = m\frac{v_A^2}{R} - 2mg(1-\cos\theta)} \quad (4)$$

Alors (2) $\xrightarrow{(3)\,\&\,(4)}$ $N = mg\cos\theta + m\frac{v_A^2}{R} - 2mg(1-\cos\theta)$

soit : $\boxed{N = m\left(\frac{v_A^2}{R} + g(-2+3\cos\theta)\right)}$ (5)

Pour que M=C ($\theta=\pi$) il faut (1)&(5) $\Rightarrow$ $\frac{v_A^2}{R} + g(-2+3\cos\pi) \geq 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{v_A \geq \sqrt{5gR}}$

AN $v_A \geq 7{,}1\ \mathrm{m.s^{-1}}$

2) Cette fois $\vec{R} = \vec{R_N} + \vec{R_T} = -N\vec{e_r} - f\vec{e_\theta}$ avec $N = \|\vec{R_N}\|$ et $f = \|\vec{R_T}\|$.

↳ on a toujours à chercher v_A / $N_{(\theta=\pi)} \geq 0$ (1) et avec: $\boxed{N = mg\cos\theta + mR\dot\theta^2}$ (2)

soit: $\boxed{N = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{R}}$ (2')

• Appliquons le Thm de l'E_k entre A et M :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W_{A\to M}(\vec{P}) + \cancel{W_{A\to M}(\vec{R_N})} + W_{A\to M}(\vec{R_T})$$

$$= -mgz + \int_A^M \vec{R_T}\cdot d\vec{BM} = -mgz + \int_A^B -f\vec{e_y}\cdot dy\,\vec{e_y} + \int_B^M -f\vec{e_\theta}\cdot R\,d\theta\,\vec{e_\theta}$$

d'où $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mgR(1-\cos\theta) - f(AB + R\theta)$

d'où $m\frac{v^2}{R} = m\frac{v_A^2}{R} - 2mg(1-\cos\theta) - 2\frac{f}{R}(AB + R\theta)$ (6)

Alors (2') $\xrightarrow{(6)}$ $\boxed{N = m\left(\frac{v_A^2}{R} + g(-2+3\cos\theta) - \frac{2f}{mR}(AB+R\theta)\right)}$. (7)

Pour que M atteigne C, il faut que $N_{\theta=\pi} \geq 0$ soit :

$$\frac{v_A^2}{R} + g(-2+3\cos\pi) - \frac{2f}{mR}(AB + R\pi) \geq 0$$

d'où $\boxed{v_A \geq \sqrt{5gR + \frac{2f}{m}(AB + R\pi)}}$ AN $v_A \geq 8{,}2\ \mathrm{m.s^{-1}}$