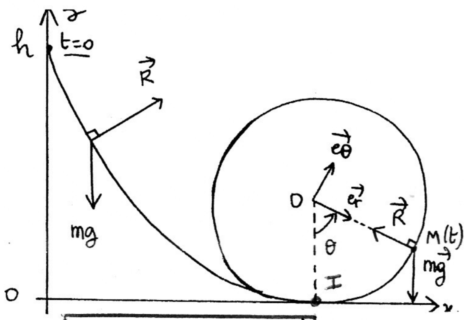
EXM3.9 : Toboggan :

PFD : $m\vec{a}_{M/R_T} = m\vec{g} + \vec{R}$ ①

Thm $\mathcal{E}_k$ entre $t=0$ et t : $\Delta\mathcal{E}_k = \cancel{W_{\vec{R}}} + W_{\vec{P}}$

$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = W_{\vec{P}}$ ②



1) $d\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = \delta W_{NC}(\vec{R}) = 0$

$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \begin{cases} \mathcal{E}_m(A) = \mathcal{E}_p(A) + 0 = mgh \\ \frac{1}{2}ma^2\dot\theta^2 + mga(1-\cos\theta) \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\boxed{v^2 = 2g(h - a(1-\cos\theta))}$ ①

$a\dot\theta^2 = \frac{2g}{a}\left(h - a(1-\cos\theta)\right)$ (*)

PFD pour le pt M décrivant le cercle : $m\vec{a}_{M/R_T} = \vec{P} + \vec{R}$

soit : $m\begin{vmatrix} -a\dot\theta^2 \\ a\ddot\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} mg\cos\theta - R \\ -mg\sin\theta \end{vmatrix}$ avec $R = \|\vec{R}\|$ $\longrightarrow$ $R = m(a\dot\theta^2 + g\cos\theta)$ (**)

$\Big\} \longrightarrow R = m\left(2g\frac{h}{a} - 2g + 3g\cos\theta\right)$ ②

2) 4c) Ⓒ M fait des tours complets : $R(\pi) \geq 0 \longrightarrow \boxed{h \geq h_{min} = \frac{5a}{2}}$

4a) ⓐ M effectue des oscillations $\Rightarrow$ v s'annule pour $\theta_1 = \theta_m$ sans que R s'annule

$\begin{cases} v(\theta_1) = 0 \\ R(\theta_1) \geq 0 \end{cases} \overset{①}{\underset{②}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} v^2(\theta_1) = 2g(h - a + a\cos\theta_1) = 0 & ①' \\ R(\theta_1) = \frac{mg}{a}(2h - 2a + 3a\cos\theta_1) \geq 0 & ②' \end{cases}$

②$\overset{①'}{\Rightarrow}$ $R(\theta_1) = \frac{mg}{\cancel{a}}\cancel{a}\cos\theta_1 > 0 \Leftrightarrow 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$

Par ailleurs ②' $\Leftrightarrow$ $a\cos\theta_1 \geq \frac{2h - 2a}{3}$

①' $\hookrightarrow$ $a - h > \frac{2h - 2a}{3}$

$\Leftrightarrow 5a > 5h$

pour $\boxed{0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}}$ on a des oscillations

$\boxed{h < a}$

4b) ⓑ $\boxed{a < h < \frac{5a}{2}}$: M quitte la gouttière et chute.

3) Cas où $\theta = 0$ et $h = \frac{5a}{2}$

alors ② devient $\boxed{R_N(I) = m\left(2g\frac{h}{a} - 2g + 3g\right) = m\left(\cancel{2}g\frac{5}{\cancel{2}} + g\right) = 6mg}$

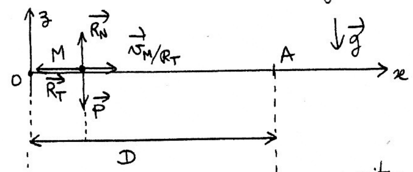
EXM3-10 :

1°) • Système {Voiture considérée comme un point matériel M de masse m}

étudié dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

• Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$

la réaction de la route sur la voiture : $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$ avec $R_T = f R_N$.



Thm de l'$\mathcal{E}_k$ entre O ($\vec{v}_0$) et A ($\vec{v}_A = \vec{0}$) :

$\Delta\mathcal{E}_{k_{O\to A}} = \sum_i W(\vec{F}_i)$

$\frac{1}{2}\cancel{m v_A^2} - \frac{1}{2}mv_0^2 = \underbrace{W(\cancel{\vec{P} + \vec{R}_N})}_{\text{travail nul}} + W(\vec{R}_T)$ (*)

$v_0 = 110\ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ $\quad$ $v_A = 0$ (voiture arrêtée)

car $\vec{P}$ et $\vec{R}_N$ sont perpendiculaires au mouvement (et donc à $d\vec{OM}$)

• Par ailleurs le PFD ($m\vec{a}_{M/R_T} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$) en projection selon Oz donne : $0 = -mg + R_N$

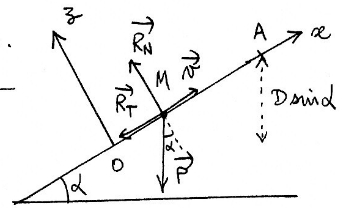
d'où $R_N = mg$ et donc $R_T = fR_N = fmg$

d'où $W(\vec{R}_T) = \int_O^A \vec{R}_T \cdot d\vec{OM} = \int_O^A -fmg\,\vec{e}_x \cdot dx\,\vec{e}_x = -fmg\,D$ (<0 bien entendu)

(*) devient : $v_0^2 = 2fgD$ soit $\boxed{D = \frac{v_0^2}{2fg}}$ mais on ne connait pas f, on ne peut donc pas calculer D directement.

Par contre, l'énoncé nous dit que pour une vitesse $v_0' = 130\ \text{km}.\text{h}^{-1}$, la distance de freinage est $D' = 500\ \text{m}$

Soit $D' = \frac{v_0'^2}{2fg}$ d'où $\boxed{D = \left(\frac{v_0}{v_0'}\right)^2 D' = 360\ \text{m}.}$



2°) lorsque la route fait un angle α avec l'horizontale

la projection du PFD selon Oz donne :

$R_N = mg\cos\alpha$ et donc $R_T = fR_N = fmg\cos\alpha$

le Théorème de l'$\mathcal{E}_k$ entre O et A : $0 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \cancel{W(\vec{R}_N)} + W(\vec{P}) + W(\vec{R}_T) = -\Delta\mathcal{E}_{p_{g\,O\to A}} + W(\vec{R}_T)$

Soit : $-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mgD\sin\alpha - fmg\cos\alpha\,D$

D'où $v_0^2 = (2g\sin\alpha + 2fg\cos\alpha)D$

de même $v_0'^2 = (2g\sin\alpha + 2fg\cos\alpha)D'$ $\Big\}$ d'où $\boxed{D = \left(\frac{v_0}{v_0'}\right)^2 D'}$

$\hookrightarrow$ Cl : Le résultat est identique que la route soit horizontale ou pas !