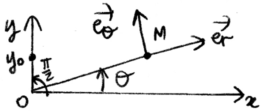
EXM 2.5 : {M} m soumis à $\vec{R}=\vec{R}_N$, $\vec{P}$, $\vec{F}=-a\,\vec{OM}$ et $\vec{f}=-b\vec{v}$

R_T galiléen.

1) $m\vec{a}_{M/R_T} = \vec{R}_N+\vec{P}+\vec{F}+\vec{f}$

• le mouvement étant plan, il se fait à altitude constante → $\ddot{z}=0 = R_N+P$

• → on travaille ds le plan (xOy) en coordonnées polaires



PFD ↳ $m\left[(\ddot r - r\dot\theta^2)\vec e_r + (r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)\vec e_\theta\right] = -ar\vec e_r - b(\dot r\vec e_r + r\dot\theta\vec e_\theta)$

en projetant selon les directions $(\vec e_r,\vec e_\theta)$: $\boxed{\begin{cases}(1) & m(\ddot r - r\dot\theta^2) = -ar - b\dot r\\ (2) & m(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta) = -br\dot\theta\end{cases}}$ équations différentielles du mvmt.

2) $\boxed{\dot\theta=\omega=c^{te}}$ ω? r(t)?

$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1) & m(\ddot r - r\omega^2) = -ar-b\dot r\\ (2) & m\,2\dot r\cancel{\dot\theta} = -br\cancel{\dot\theta}\end{cases}$ (car $\dot\theta=\omega\neq0$) $\Leftrightarrow \dot r = -\frac{b}{2m}r(t)$ qu'on peut injecter dans (1) : $m(\ddot r - r\omega^2) = \left(-a+\frac{b^2}{2m}\right)r$

$(1) \Leftrightarrow \ddot r + \left(\frac{a}{m}-\frac{b^2}{2m^2}-\omega^2\right) r = 0$

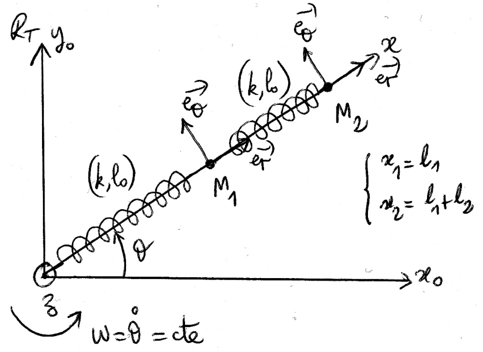
(2) admet pour solution $r(t) = r_0\exp\left(\frac{-b}{2m}t\right)$ avec $r_0=r(t=0)=y_0$ puisqu' à $t=0$ $\theta=\frac{\pi}{2}$ car M est en $(0,y_0)$

→ $\boxed{r(t)=y_0\exp\left(\frac{-bt}{2m}\right)}$

en l'injectant dans (1) : $\left(\frac{-b}{2m}\right)^2\cancel{r(t)} + \left(\frac{a}{m}-\frac{b^2}{2m^2}-\omega^2\right)\cancel{r(t)}=0$

d'où $\boxed{\omega=\sqrt{\frac{a}{m}-\frac{b^2}{4m^2}}}$

Ex M2-10 Points matériels en rotation



PFD pour M1 dans R_T galiléen en projection selon $(Ox)=(M_1,\vec e_r)$, exprimé ds la base cylindrique

$m(\ddot x_1 - x_1\dot\theta^2) = -k(x_1-\cancel{l_0}) + k(x_2-x_1-\cancel{l_0})$

$m(\ddot x_1 - \omega^2 x_1) = -2kx_1 + kx_2$

$\boxed{\ddot x_1 + \left(\frac{2k}{m}-\omega^2\right)x_1 = \frac{k}{m}x_2}$ (1)

$\Leftrightarrow \ddot l_1 + \left(\frac{2k}{m}-\omega^2\right) l_1 = \frac{k}{m}(l_1+l_2)$

soit $\ddot l_1 + \left(\frac{k}{m}-\omega^2\right) l_1 = \frac{k}{m} l_2$ soit $\boxed{\ddot l_1 + \omega^2(K-1)l_1 = \omega^2 K l_2}$ (1')

de même pour M_2 :

$m(\ddot x_2 - x_2\dot\theta^2) = -k(x_2-x_1-l_0)$

$\boxed{\ddot x_2 + \left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)x_2 = \frac{k}{m}(l_0+l_1)}$ (2)

$\left.\begin{array}{l}\ddot l_1 + \ddot l_2 + \omega^2(K-1)(l_1+l_2) = \frac{k}{m}(l_0+l_1)\\ (1')\ \ddot l_1 + \omega^2(K-1)l_1 = \omega^2 K l_2\end{array}\right\} \rightarrow \ddot l_2 + \omega^2(K-1)l_2 + \omega^2 K l_2 = \omega^2 K(l_0+l_1)$

$\boxed{\ddot l_2 + \omega^2(2K-1) l_2 = \omega^2 K(l_0+l_1)}$ (2')