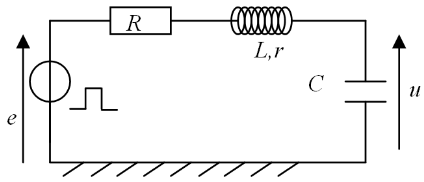
III Circuit RLC série

III.1 Théorie



➜ Équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R_0}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{u}{LC}=\frac{E}{LC}}$$

Qu'on peut écrire sous la forme canonique :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u=\omega_0^2E} \quad (E)$$

en posant : $\left\{\begin{array}{ll} \boxed{\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}} & \text{: pulsation propre} \\ \boxed{Q=\dfrac{L\omega_0}{R}=\dfrac{1}{RC\omega_0}=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}} & \text{: facteur de qualité} \end{array}\right.$

➜ **Solutions :**

Hyp : on se place dans le cas où $e(t)=E$ avec, comme conditions initiales $u(0^-)=0$ et $i(0^-)=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^-)=0$

Csqce : comme il y a continuité de l'intensité i traversant la bobine ainsi que de la tension u aux bornes du condensateur : $i(0^+)=C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)=0$ et $u(0^+)=0$.

(1) La solution $u(t)$ est de la forme $\boxed{u(t)=u_P+u_G(t)}$ avec :

$\left\{\begin{array}{ll} u_P & \text{: une solution particulière de l'équation avec second membre} \\ u_G(t) & \text{: la solution générale de l'équation homogène} \end{array}\right.$

(2) Le second membre étant constant, on cherche une solution particulière constante :

$\cancel{\dfrac{\mathrm{d}^2u_P}{\mathrm{d}t^2}}+\dfrac{\omega_0}{Q}\cancel{\dfrac{\mathrm{d}u_P}{\mathrm{d}t}}+\omega_0^2u_P=\omega_0^2E$, soit : $\boxed{u_P=E}$

(3) Équation caractéristique $(*)$ associée à (E) : $\boxed{r^2+\dfrac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2r=0}$

Le discriminant de cette équation caractéristique est : $\Delta=\left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2(1-4Q^2)$

(4) régime transitoire apériodique : cas où $\Delta>0 \Leftrightarrow Q<\dfrac{1}{2}$

Les racines de $(*)$ sont deux racines réelles (négatives) : $r_{1/2}=-\dfrac{\omega_0}{2Q}\pm\dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$.

Alors : $\boxed{u_G(t)=A.e^{r_1t}+B.e^{r_2t}}$

$\rightarrow$ Soit : $u=u_P+u_G(t)=E+A.e^{r_1t}+B.e^{r_2t}$ et donc : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=(r_1A.e^{r_1t}+r_2B.e^{r_1t})$

Avec, comme conditions initiales : $\left\{\begin{array}{lll} u(0^+) & =A+B+E & =0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) & =r_1A+r_2B & =0 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=-\dfrac{r_2E}{r_2-r_1} \\ B=\dfrac{r_1E}{r_2-r_1} \end{array}\right.$

$$\rightarrow \boxed{u(t)=E\left[1+\frac{1}{r_2-r_1}\left(-r_2.e^{r_1t}+r_1.e^{r_2t}\right)\right]}$$

(5) régime transitoire critique : cas où $\Delta=0 \Leftrightarrow Q=\dfrac{1}{2}$

Les racines de $(*)$ constituent une racine double : $r_1=r_2=-\dfrac{\omega_0}{2Q}=-\omega_0$.

Alors : $\boxed{u_G(t)=(A+B.t).e^{-\omega_0t}}$

$\rightarrow$ Soit : $u=u_P+u_G(t)=E+(A+B.t).e^{-\omega_0t}$, et donc : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=[-\omega_0(A+B.t)+B].e^{-\omega_0t}$

Avec, comme conditions initiales : $\begin{cases} u(0^+) & = A+E & = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) & = -\omega_0 A + B & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -E \\ B = -\omega_0 E \end{cases}$

$\rightarrow \boxed{u(t) = E\left[1-(1+\omega_0 t).e^{-\omega_0 t}\right]}$

(6) régime transitoire pseudo-périodique : cas où $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > \dfrac{1}{2}$

Les racines de $(*)$ sont deux racines complexes : $r_{1/2} =$ « $\dfrac{-b \pm j\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ » $= -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$.

Soit : $r_{1/2} = -\dfrac{1}{\tau} \pm j\omega$ avec $\begin{cases} \boxed{\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}} \\ \boxed{\omega = \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}} \end{cases}$ pseudo-pulsation

Alors : $\boxed{u_G(t) = (A.\cos(\omega t) + B.\sin(\omega t)).\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$

$\rightarrow$ Soit : $u = u_P + u_G(t) = E + (A.\cos(\omega t) + B.\sin(\omega t)).\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

Et donc : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left[\left(-\dfrac{A}{\tau} + B\omega\right).\cos(\omega t) + \left(-\dfrac{B}{\tau} - A\omega\right).\sin(\omega t)\right].\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

Avec, comme conditions initiales : $\begin{cases} u(0^+) & = A+E & = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) & = -\dfrac{A}{\tau} + B\omega & = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -E \\ B = -\dfrac{A}{\tau\omega} = -\dfrac{E}{\sqrt{4Q^2-1}} \end{cases}$

$\rightarrow \boxed{u(t) = E\left[1 - \left(\cos(\omega t) + \dfrac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\omega t)\right)\right].e\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$

(7) Résistance critique : valeur de R qui permet le régime critique lorsque L et C sont fixées :

$\boxed{R_c = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$ — **A.N. :** pour $L = 40\ mH$ et $C = 0,1\ \mu F$: $R_c = 1\,265\ \Omega$

III.2 Montage

• Pour un régime pseudo-périodique : $u_G(t) = (A.\cos(\omega t) + B.\sin(\omega t)).\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ et le décrément logarithmique s'écrit : $\delta = \ln\dfrac{U_{Gm}(t_0)}{U_{Gm}(t_0+T)}$, soit : $\boxed{\delta = \dfrac{T}{\tau}}$ ce qui peut s'écrire :

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\tau\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}} & \left(\simeq \dfrac{\pi}{Q} \text{ lorsque } Q \text{ est « élevé »}\right) \\ \dfrac{T\omega_0}{2Q} = \dfrac{T\cancel{\omega_0}R}{2\cancel{\omega_0}} & \rightarrow \boxed{\delta = \dfrac{T.R}{2L}} \ ① \end{cases}$$

• Comme $\omega = \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$, en élevant au carré et en remplaçant Q par $\dfrac{L\omega_0}{R}$, on obtient :

$\boxed{\omega_0^2 = \omega^2 + \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2}$ ②

• De plus, comme $\dfrac{\omega_0}{=}\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, ② donne : $\dfrac{1}{LC} = \dfrac{4pi^2}{T^2} + \left(\dfrac{R}{2L}\right)^2$

Soit, en utilisant ① : $\dfrac{1}{LC} = \dfrac{4\pi^2}{T^2} + \dfrac{\delta^2}{T^2}$

$\rightarrow$ d'où : $\boxed{L = \dfrac{T^2}{(4\pi^2+\delta^2).C}}$ ③

• Cette dernière relation injectée dans ① donne : $\boxed{R = \dfrac{2\delta T}{(4\pi^2+\delta^2).C}}$ ④

C étant supposée connue,
la connaissance de δ (décrément logarithmique) et T (pseudo-période) permettent de remonter aux caractéristiques du circuit : R, L et Q.

• Avec une bobine de 1 000 spires et une capacité $C = 0,1\ \mu F$,
on mesure $\boxed{T = 410\ \mu s \text{ et } \delta = 0,81}$
Les relations ③ et ④ donnent accès aux valeurs : $\boxed{L_{\mathsf{calc}} \simeq 42\ mH \text{ et } R_{\mathsf{calc}} \simeq 165\ \Omega}$

• En réalité, il ne s'agit pas de R qui a été fixée à 100 Ω, mais de la résistance totale du circuit : $R_T = R + r + R_g$ où R est la résistance variable (boîte AOIP), r la résistance interne de la bobine ($\sim 9\ \Omega$) et R_g la résistance interne du générateur.
Ce qui permet d'obtenir une bonne estimation de la résistance interne du générateur :

$$\boxed{R_g = R_T - r - R \simeq 56\ \Omega}$$

Valeur tout à fait convenable puisque $\sim 50\ \Omega$.
Ainsi $R_{c,\mathsf{théo}} = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} - r - R_g = 1\,265 - 9 - 56 \sim 1\,200\ \Omega$

• $\boxed{Q_{\mathsf{calc}} = \dfrac{1}{R_T}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 3,9} \rightarrow \tau_{\mathsf{calc}} = \dfrac{2Q}{\omega_0} \simeq 495\ \mu s$

• Avec un tel circuit, le facteur de qualité maximal que l'on peut atteindre est obtenu lorsque R_T est minimale, donc lorsque $R = 0$: $\boxed{Q_{\mathsf{max}} = \dfrac{1}{R_g + r}\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 9,8 \sim 10}$