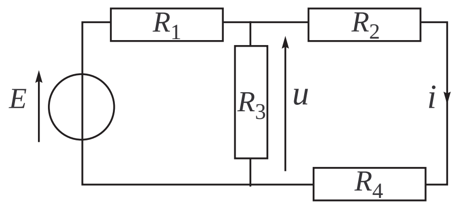
Exercices – Électrocinétique

■ Calculs de tensions et de courants

Ex-E2.1 Réseau à deux mailles

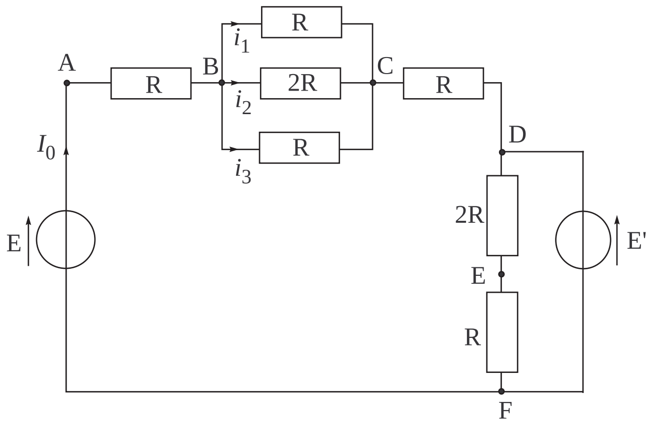
Déterminer, pour le circuit ci-contre, l'intensité i qui traverse la résistance R_2 et la tension u aux bornes de la résistance R_3 :



1) en faisant des associations de résistances et en appliquant le diviseur de tension.
2) en faisant une transformation Thévenin → Norton et en appliquant le diviseur de courant.
3) Application numérique pour $E = 6\ V$, $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 50\ \Omega$

Rép : 1/2) $i = \dfrac{R_3 E}{R_1 R_3 + (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$; $u = \dfrac{R_3(R_2 + R_4)E}{R_1 R_3 + (R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$;
3) $i = 15\ mA$ et $u = 1{,}5\ V$.

Ex-E2.2 Circuit linéaire



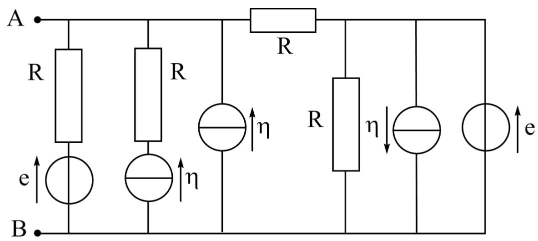
Dans le circuit ci-contre :
1) Calculer U_{EF},
2) Calculer l'intensité I_0 circulant dans la branche principale ;
3) Calculer l'intensité I' circulant dans la branche contenant le générateur E' (préciser son sens) ;
4) Calculer les intensités i_1, i_2 et i_3.
Données :
$R = 1\,\Omega$, $E = 5\,V$ et $E' = 3\,V$.

Rép : $U_{EF} \simeq 1\ V$; $I_0 \simeq 0{,}83\ A$; $I' \simeq 0{,}17\ A$; $i_1 = i_3 \simeq 0{,}33\ A$; $i_2 \simeq 0{,}17\ A$.

■ Association de générateurs

Ex-E2.3 Modélisation de Thévenin (1)

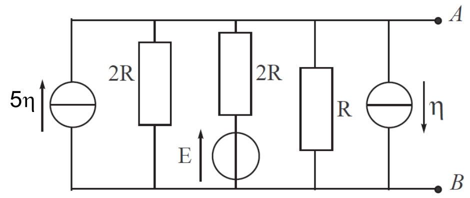
Donner le générateur de Thévenin équivalent au circuit ci-contre entre A et B.



Rép : $R_{\text{éq}} = \dfrac{R}{2}$ et $E_{\text{Th}} = e + R\eta$.

Ex-E2.4 Modélisation de Thévenin (2)

Déterminer le générateur de Thévenin équivalent au réseau dipolaire entre les bornes A et B ci-contre.
Données : $\eta = 1\,A$, $R = 6\,\Omega$ et $E = 24\,V$.

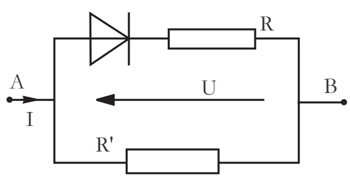


Rép : $R_{eq} = \dfrac{R}{2} = 3\ \Omega$ et $E_{Th} = 2R\eta + \dfrac{E}{4} = 18\ V$

■ Caractéristique d'un dipôle

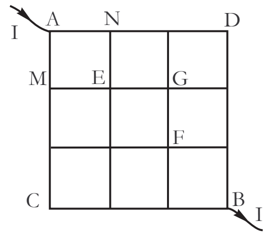
Ex-E2.5 Groupement diode idéale-résistances

Représenter la caractéristique Intensité-Tension $I(U)$ du dipôle équivalent au groupement entre les points A et B.



■ Calculs de résistances équivalentes

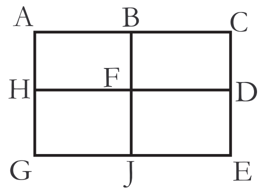
Ex-E2.6 **Résistance équivalente d'un réseau dipolaire (1)**



Calculer la résistance équivalente à un réseau à mailles carrées, chaque côtés ayant la résistance r.

Rép : $R_{\text{éq}} = \dfrac{13}{7}R$

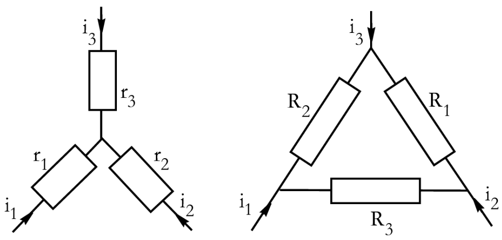
Ex-E2.7 **Résistance équivalente d'un réseau dipolaire (2)**



Chaque trait représente un résistor de résistance R.
Déterminer la résistance équivalente de ce réseau vu des points :
1) A et C ($5R/4$) **2)** A et E ($3R/2$) **3)** A et F ($7R/8$)
4) B et D ($5R/6$) **5)** H et D (R) **6)** A et B ($17R/24$)
7) B et F ($7R/12$)

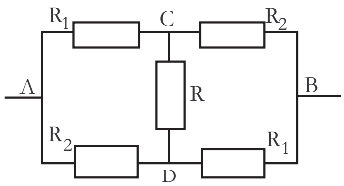
Ex-E2.8 **Théorème de Kennelly (À comprendre !)**

On considère les deux circuits ci-dessous : celui de gauche est appelé le circuit « étoile » et celui de droite circuit « triangle ». Exprimer les résistances r_1,r_2 et r_3 du circuit étoile en fonction des résistances R_1, R_2 et R_3 du circuit triangle pour que les deux circuits soient équivalents. La relation obtenue constitue le théorème de Kennelly.



Rép : $r_1 = \dfrac{R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$, r_2 et r_3 se déduisent par permutation circulaire des indices.

Ex-E2.9 **Résistance équivalente d'un réseau dipolaire (3)**



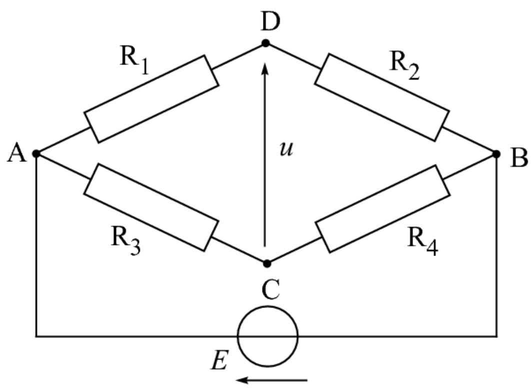
1) Calculer la résistance équivalente du réseau suivant :
a. en utilisant les lois de Kirchoff.
b. en utilisant les regroupements de résistances (série, parallèle, triangle-étoile).
2) On applique entre A et B une tension $U = 11\ V$.
Calculer l'intensité du courant dans la branche CD avec : $R_1 = 2R$, $R_2 = 4R$, et $R = 1\ \Omega$.

Rép : **1)** $R_{\text{éq}} = \dfrac{2R_1R_2 + RR_1 + RR_2}{2R + R_1 + R_2}$; **2)** $I = I_{C\to D} = \dfrac{U}{11R} = 1\ A$.

■ Diviseur de tension

Ex-E2.10 **Équilibrage du pont de Weahtsone**

Un pont de Weahtsone est un montage électrique permettant de déterminer une résistance inconnue.
La résistance à déterminer est R_1.
Les résistances R_3 et R_4 sont fixes et connues.
R_2 est une résistance variable dont on connaît la valeur.
Le pont est dit **équilibré** lorsque la tension u mesurée entre C et D est nulle.



1) Déterminer la tension u en fonction de E et des résistances R_1, R_2, R_3 et R_4.
2) À quelle condition le pont est-il équilibré ? Déterminer alors R_1.
Données : $R_3 = 100\,\Omega$; $R_4 = 5\,k\Omega$; $R_2 = 1\,827\,\Omega$; $E = 6\,V$.

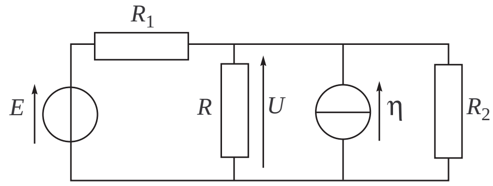
3) Le voltmètre indique la tension « $u = 0$ » si, en réalité, on a : $|u| < 1\,mV$.
→ Dans le cadre de l'application numérique de la question **2)**, donner la précision sur la mesure de R_1.

Rép : **1)** $u = \left(\dfrac{R_3}{R_3+R_4} - \dfrac{R_1}{R_1+R_2}\right)E$; **2)** $R_1 = 36,5\ \Omega$; **3)** $R_1 = 36,5 \pm 0,3\ \Omega$

■ LNTP / Théorème de Millman

Ex-E2.11 Théorème de Millman (1)

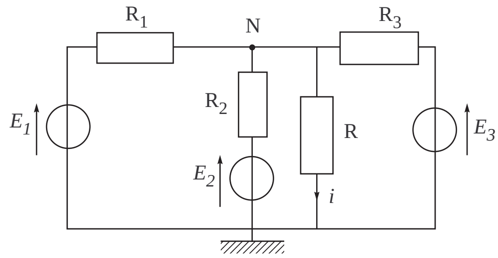
Déterminer la valeur de R pour avoir $U = 2\ V$:
1) après avoir simplifié le schéma (transformation(s) Thévenin/Norton et association(s))
2) directement en utilisant le théorème de Millman.
Données :
$E = 10\ V$; $\eta = 1\ A$; $R_1 = 4\ \Omega$; $R_2 = 2\ \Omega$.



Rép : $R = 1\ \Omega$

Ex-E2.12 Théorème de Millman (2)

1) Énoncer la loi des nœuds en termes de potentiels pour le nœud N dans le montage ci-contre.
En déduire le courant i dans la résistance R.
2) Trouver cette même intensité i en utilisant les transformations Thévenin ↔ Norton.

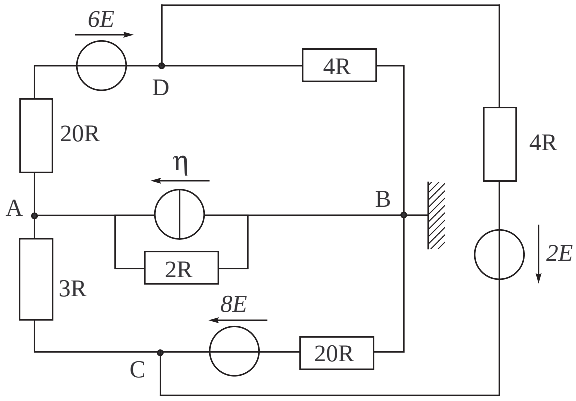


Rép : $i = \dfrac{E_1R_2R_3 + E_2R_3R_1 + E_3R_1R_2}{R_1R_2R_3 + R(R_2R_3 + R_1R_2 + R_1R_3)}$

Ex-E2.13 LNTP

Le nœud B est connecté à la masse du circuit de la figure ci-contre.
On donne : $\eta = 15\,A$; $R = 1\,\Omega$ et $E = 1\,V$.

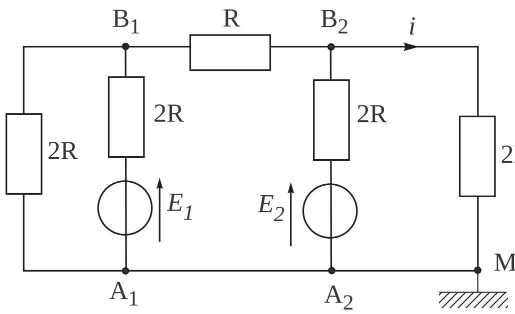
1) Déterminer les relations entre V_A, V_C et V_D en appliquant la loi des nœuds en termes de potentiels aux nœuds A, C et D.
2) Un voltmètre numérique, branché entre B et D, mesure $u_{DB} = 10\,V$.
→ En déduire les valeurs de V_A et V_C.



Rép : $V_A = 24\ V$ et $V_C = 18\ V$

Ex-E2.14 Théorème de superposition et LNTP

Déterminer l'intensité i du courant qui circule dans la branche B_2MA_2 en considérant deux états successifs du circuit et en appliquant le théorème de Millman ou la LNTP.

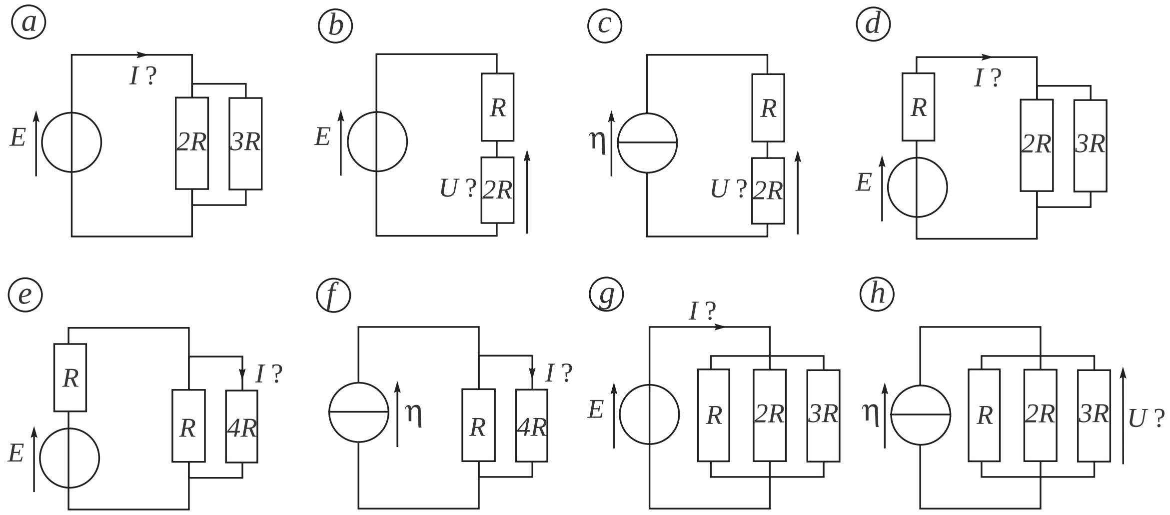


Rép : $i = \dfrac{1}{6R}\left(\dfrac{E_1}{2} + E_2\right)$

Ex-E2.15 **Exercice de rapidité** [P5/41]

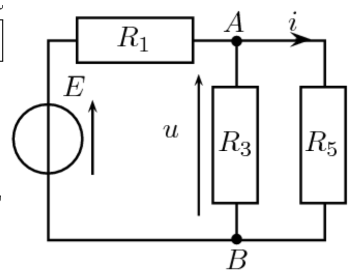
Dans les circuits ci-dessous, déterminer, par la méthode la plus rapide, la grandeur demandée.

Données : $E = 9\ V$; $\eta = 5\ A$; $R = 100\ \Omega$



Rép : **a)** Loi de nœuds suivi de la loi d'Ohm : $I = I_1 + I_2 = \dfrac{E}{2R} + \dfrac{E}{3R} = \dfrac{5E}{6R} = 75\ mA$;
b) Diviseur de tension : $U = \dfrac{2R}{2R+R}E = \dfrac{2}{3}E = 6\ V$; **c)** Loi d'Ohm :$U = 2R.\eta = 600\ V$;
d) Association « parallèle »puis loi de Pouillet : $i = \dfrac{E}{\frac{6R}{5} + R} = \dfrac{5E}{11R} \simeq 41\ mA$;
e) Association « parallèle », loi de Pouillet puis diviseur de courant : $I_0 = \dfrac{E}{\frac{4R}{5} + R} = \dfrac{5E}{9R}$ et $I = \dfrac{R}{4R+R}I_0 = \dfrac{E}{9R} = 10\ mA$; **f)** Diviseur de courant : $I = \dfrac{R}{4R+R}\eta = \dfrac{\eta}{5} = 1\ A$;
g) Loi d'Ohm : $I = G_{\text{éq}}E = \left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{3R}\right).E = \dfrac{11E}{6R} = 165\ mA$;
h) Loi d'Ohm : $U = \dfrac{\eta}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{2R} + \dfrac{1}{3R}} = \dfrac{6R\eta}{11} \simeq 273\ V$

Solution Ex-E2.1



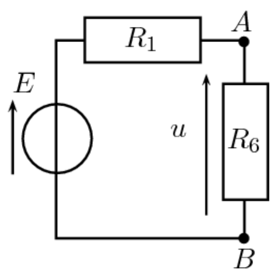
1) Après avoir introduit et nommé les nœuds, on peut introduire la résistance équivalente à R_2 et R_4 qui sont en série : $\boxed{R_5 = R_2 + R_4}$

• Il apparaît que R_3 est en parallèle avec R_5.

En simplifiant : $\boxed{R_6 = R_3 // R_5 = \dfrac{R_3R_5}{R_3+R_5}}$.

• On reconnaît un diviseur de tension, R_1 et R_6 étant en série, soumises à la tension E :

$$U_{AB} = \frac{R_6}{R_1+R_6}E = \frac{R_3R_5}{R_3+R_5}\,\frac{E}{R_1 + \frac{R_3R_5}{4R_3+R_5}}$$

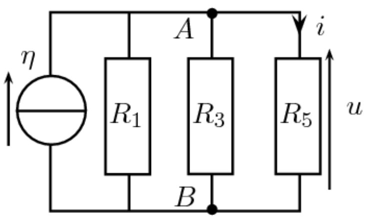


Soit : $\boxed{u = U_{AB} = \dfrac{R_3(R_2+R_4)}{R_1R_3 + (R_1+R_3)(R_2+R_4)}E}$

• $i = \dfrac{U_{AB}}{R_5}$ sur le premier schéma équivalent.

Soit : $\boxed{i = \dfrac{R_3E}{R_1R_3 + (R_1+R_3)(R_2+R_4)}}$.

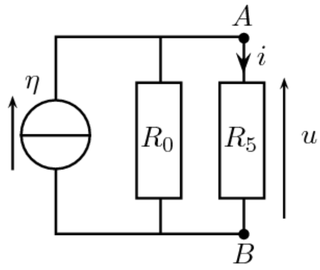
Attention ! i n'apparaît plus sur le second schéma équivalent. Il fallait revenir au premier schéma équivalent pour l'exprimer.



2) On introduit et on nomme les nœuds. On reconnaît un générateur de THÉVENIN de *f.é.m.* E et de résistance interne R_1 entre A et B. On peut faire une transformation Thévenin → Norton.

Il apparaît le *c.é.m.* : $\boxed{\eta = \frac{E}{R_1}}$.

• R_1 et R_3 en paralèle, de résistance équivalente : $\boxed{R_0 = \frac{R_1R_3}{R_1+R_3}}$



• R_0 est en parallèle avec R_5, **mais on ne simplifie pas !** car :
- on cherche i
- on reconnaît un diviseur de courant au nœud A alimenté par η :

$$i = \frac{R_0}{R_0+R_5}\eta = \frac{R_1R_3}{R_1+R_3}.\frac{1}{\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+R_2+R_4}.\frac{E}{R_1}$$

Soit : $\boxed{i = \frac{R_3E}{R_1R_3+(R_1+R_3)(R_2+R_4)}}$

• Puisque $U_{AB} = R_5i$, on retrouve : $\boxed{u = U_{AB} = \frac{R_3(R_2+R_4)}{R_1R_3+(R_1+R_3)(R_2+R_4)}E}$

3) $\boxed{i = 15\ mA}$ et $\boxed{u = U_{AB} = 1,5\ V}$

Solution Ex-E2.2

1) Montage « Diviseur de tension » entre D et F : $\boxed{U_{EF} = \frac{R}{R+2R}E' = 1\ V}$

2) • D'abord exprimer la résistance équivalente entre B et C : $\boxed{R_{eq} = (R//R)//2R = \frac{R}{2}//2R = \frac{2}{5}R}$

• Du point de vue de la branche principale, la branche $\{D, 2R, R, F\}$ est inutile puisqu'une force éloctromotrice E' en parallèle impose la tension à ses bornes.
On peut donc l'enlever sur un schéma équivalent.
Il apparaît deux forces électromotrices en série qui s'oppose : on peut donc les remplacer par une seule et unique *f.é.m.* de valeur $\boxed{E_0 = E - E' = 2\ V}$ et de même sens que E.

• Le circuit est maintenant équivalent à un circuit formé d'une seule maille
- parcourue par I_0,
- constitué d'une *f.é.m.* E_0 de même sens que I_0
- et d'une résistance équivalente $\boxed{R_0 = R + R_{eq} + R = \frac{12}{5}R}$.

→ la loi des mailles donne $\boxed{I_0 = \frac{E_0}{R_0} = \frac{5}{12R}(E-E') = \frac{5}{6}\ A \approx 0,83\ A}$

3) • Pour connaître l'intensité I' circulant dans la branche contenant E' on calcule d'abord l'intensité I'' qui circule de D vers F dans la branche contenant les résistances $2R + R = 3R$ soumises à la tension E'.
La loi d'OHM donne, en convention récepteur : $I'' = \frac{E'}{3R} = 1\ A$

• On en déduit donc, d'après la loi des nœuds et en définissant I' par rapport à E' en convention générateur, que $\boxed{I' = I'' - I_0 = \frac{1}{6}\ A \approx 0,17\ A}$ (I' dirigée de F vers D).

4) • Tout d'abord, les symétries imposent que $\boxed{i_1 = i_3}$.
On reconnaît ensuite entre B et C un diviseur de courant :

• On a donc : $i_1 = \frac{G_1}{G_{eq}}I_0 = \frac{R_{eq}}{R}I_0 \Longrightarrow \boxed{i_1 = i_3 = \frac{2}{5}I_0 = \frac{1}{3}\ A \approx 0,33\ A}$

• De même : $i_2 = \frac{G_2}{G_{eq}}I_0 = \frac{R_{eq}}{2R}I_0 \Longrightarrow \boxed{i_2 = \frac{1}{5}I_0 = \frac{1}{6}\ A \approx 0,17\ A}$

• On vérifie bien entendu la loi des nœuds en B : $\boxed{I_0 = i_1 + i_2 + i_3}$.

E3

Comment aborder l'étude du régime transitoire d'un circuit ?

❑ Méthode 1.— De manière générale :

✦ Lire l'énoncé. Ouvre-t-on ou ferme-t-on l'interrupteur à $t = 0$?

✦ il est souvent souhaitable de faire d'abord une étude qualitative en déterminant les régimes établis (schémas simplifiés) à $t = 0^-$ et $t \to +\infty$ — ainsi que la (les) condition(s) initiale(s) (règles de continuité) à $t = 0$.

✦ Quand cela est possible, simplifier le circuit à l'aide de transformations Thévenin/Norton et d'associations de générateurs, de résistances, d'inductances ou de capacités.
Toute simplification qui ferait disparaître l'interrupteur ou une variable dont on demande l'expression est à proscrire !

✦ Définir sur le schéma toutes les variables électriques à utiliser : tensions, courants, charges, en les différenciant clairement par des indices adaptés. En particulier :
→ préciser le sens de chaque courant et l'armature qui porte la charge q
→ éviter d'introduire des variables qui ne sont pas strictement nécessaires, telles que les tensions aux bornes de chaque dipôle, les charges si aucune question ne s'y rapporte, ou certains courants qui peuvent s'écrire en fonction d'autres par une loi des nœuds implicite.

✦ Regrouper sous forme d'un système toutes les équations nécessaires :
→ lois constitutives de chaque dipôle passif (autant que de dipôles).
→ lois des noeuds (autant que de noeuds indépendants)
→ lois des mailles (autant que de mailles indépendantes)
Ce faisant :
- s'efforcer de faire apparaître au maximum la grandeur étudiée
- faire attention à la convention (récepteur ou générateur) imposée à chaque dipôle par les orientations des mailles.

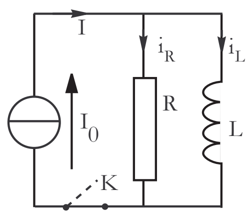
✦ Établir l'équation différentielle à partir du système d'équations précédent. Pour cela, substituer les variables en commençant par celles qui apparaissent dans les équations les plus courtes (relations tension/courant spécifique aux divers dipôles, loi des nœuds), et réduire ainsi le nombre d'équations jusqu'à en obtenir une seule.

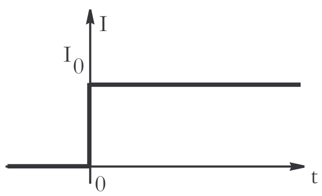
✦ Identifier le type d'équation différentielle (ordre, 2$^{\text{d}}$ membre) puis :
→ déterminer la *solution particulière* de l'équation différentielle avec 2$^{\text{d}}$ membre
→ écrire la *solution générale* de l'équation différentielle sans second membre (expression à connaître par cœur)
→ la(les) constante(s) d'intégration se détermine(nt) à l'aide de la (des) condition(s) initiale(s) qui conceme(nt) la *solution totale* (sol. particulière + sol. générale).

Régimes transitoires et régime forcé continu

Ex-E3.1 Circuit d'ordre 1 (1)

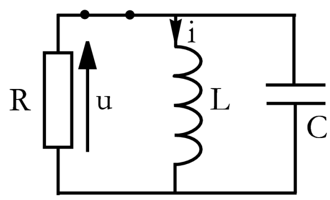
Exprimer $i_R(t)$ et $i_L(t)$, puis tracer les courbes représentatives.
On posera $\tau = \dfrac{L}{R}$.





Rép : $i_L(t) = I\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$ et $i_R(t) = I\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

Ex-E3.2 **Circuit RLC parallèle**



1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par i en fonction de : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q_0 = RC\omega_0$.

2) On pose $\lambda = \dfrac{1}{2Q_0}$. Déterminer $i(t)$ sachant que $i(t=0) = i_0 \neq 0$ et $u(t=0) = 0$.

On distinguera trois cas : **a)** $\lambda = 1$, **b)** $\lambda > 1$ et **c)** $\lambda < 1$.

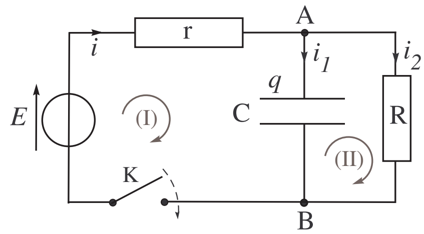
Rép : **1)** $\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i = 0$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = RC\omega_0 = \dfrac{R}{L\omega_0}$;

2.a) $\lambda > 1 : i(t) = \dfrac{i_0}{r_1 - r_2}\left(-r_2 e^{r_1 t} + r_1 e^{r_2 t}\right)$ avec $r_{1/2} = -\lambda\omega_0 \mp \omega_0\sqrt{\lambda^2 - 1}$;

2.b) $\lambda = 0 : i(t) = i_0(1 + \lambda\omega_0 t)e^{-\lambda\omega_0 t}$;

2.c) $\lambda < 1 : i(t) = i_0(\cos\omega t + \dfrac{\sin\omega t}{\tau\omega})\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = \dfrac{1}{\lambda\omega_0}$ et $\omega = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$.

Ex-E3.3 **Circuit d'ordre 1 (2)**



Dans le circuit représenté ci-contre on ferme l'interrupteur K à la date $t = 0$, le condensateur étant initialement déchargé.

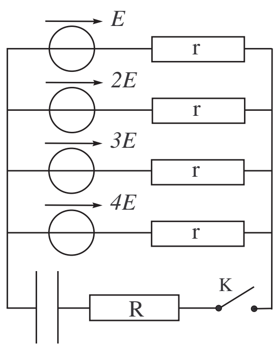
1) Établir l'expression de $q(t)$ où q est la charge du condensateur, en déduire i_1, i_2 et i en fonction du temps.

2) Calculer à la date t_1 l'énergie stockée dans le condensateur.

3) Écrire sous la forme d'une somme d'intégrales un bilan d'énergie entre les dates 0 et t_1.

Rép : **1)** En posant $\tau = \dfrac{CRr}{R+r}$: $q(t) = \dfrac{ECR}{R+r}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$; $i_1(t) = \dfrac{E}{r}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$; $i_2(t) = \dfrac{E}{R+r}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$; $i(t) = \dfrac{E}{R+r}\left(1 + \dfrac{R}{r}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$.

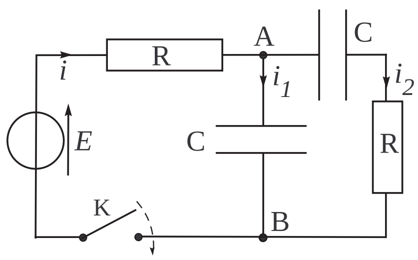
Ex-E3.4 **Circuit d'ordre 1 (3)**



Déterminer l'intensité du courant $i(t)$ dans le condensateur, ainsi que la tension $u(t)$ à ses bornes sachant que l'on ferme l'interrupteur à la date $t = 0$ et que le condensateur n'est pas chargé initialement. Représenter graphiquement $i(t)$ et $u(t)$.

Rép : $i(t) = \dfrac{10E}{4R+r}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = C\left(R + \dfrac{r}{4}\right)$; $u(t) = \dfrac{5E}{2}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$.

Ex-E3.5 **Régime transitoire apériodique (*)**



À $t = 0^-$, les condensateurs sont déchargés. On ferme alors l'interrupteur K.

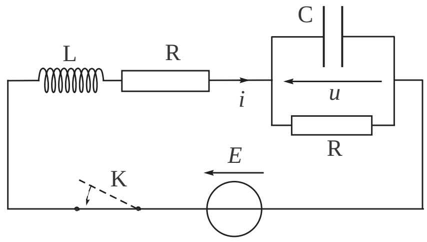
1) Établir l'équation différentielle en i_1.

2) Déterminer les conditions initiales $i_1(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

3) Exprimer $i_1(t)$.

Rép : **1)** i_1 vérifie l'équation canonique d'ordre 2 avec $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $Q = \dfrac{1}{3}$; **2)** $i_1(0^+) = \dfrac{E}{R}$ et $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\dfrac{2E}{CR^2}$; **3)** $i_1(t) = \dfrac{E}{R}\left[\mathrm{ch}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2RC}t\right) - \dfrac{1}{\sqrt{5}}.\mathrm{sh}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2RC}t\right)\right]\exp\left(-\dfrac{3t}{2RC}\right)$

Ex-E3.6 **Bobine et condensateur réels en série (*)**



Le montage ci-contre modélise une bobine réelle (L, R) en série avec un condensateur réel (C, R) initialement déchargé. On ferme l'interrupteur K à la date $t = 0$

On impose la relation suivante : $\tau = \dfrac{L}{R} = RC$.

Initialement : $i(0^-) = 0$ et $u(0^-) = 0$.

1) Déterminer $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$

2) Établir l'équation différentielle régissant $u(t)$ — tension aux bornes du condensateur lorsque le circuit est branché, à $t = 0$, sur un générateur de tension E — sous la forme : $ddersansut + \dfrac{2}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2}{\tau^2}u = \dfrac{E}{\tau^2}$

3) Déterminer $u(t)$ pour $t \geq 0$.

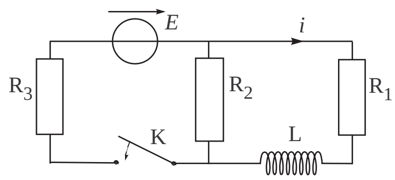
4) Déterminer $i(t)$, intensité circulant dans la bobine. Représentation graphique de $i(t)$.

5) Peut-on prévoir le régime permanent sans calcul ? Si oui, déterminer U, tension aux bornes du condensateur, et I, courant dans la bobine, en régime permanent.

6) Déterminer le facteur de qualité Q de ce circuit. vérifier que sa valeur est en accord avec la nature du régime transitoire.

Rép : **1)** Exprimer $u = u_C$, $u = u_R$ et la loi des nœuds en fonction de i, u et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Conclure ; **3)** $u(t) = \dfrac{E}{2} - \dfrac{E}{2}\left(\cos\dfrac{t}{\tau} + \sin\dfrac{t}{\tau}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$; **4)** $i(t) = \dfrac{E}{2R}\left[1 + \left(-\cos\dfrac{t}{\tau} + \sin\dfrac{t}{\tau}\right)\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right]$; **5)** Faire un schéma équivalent du montage lorsque le régime permanent continu est atteint : $I = \dfrac{E}{2R}$ et $U = \dfrac{E}{2}$; **6)** $Q = \dfrac{1}{\sqrt{2}} > \dfrac{1}{2}$, donc régime transitoire pseudo-périodique.

Ex-E3.7 **Trois résistances et une bobine**



Le circuit étudié comporte trois résistances R_1, R_2 et R_3, une bobine parfaite d'inductance L, un générateur de *f.é.m.* E et un interrupteur K.

1) Initialement, la bobine n'est parcourue par aucun courant. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interupteur K.

→ Établir la loi d'évolution de $i(t)$ et déterminer le courant I en régime permanent dans la bobine. On posera $\tau = \dfrac{L(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$.

2) Le courant d'intensité I est établi, on ouvre à $t = 0$ (réinitialisation du temps !).

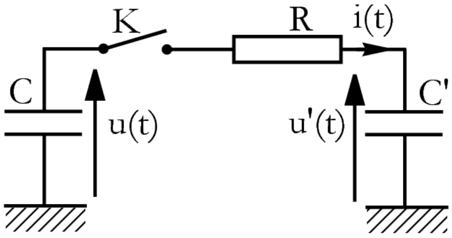
→ Déterminer la nouvelle loi donnant $i(t)$ et l'énergie dissipée par effet Joule dans les résistances. On posera $\tau' = \dfrac{L}{R_1 + R_2}$.

Rép : **1)** $i(t) = I\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$ avec $I = \dfrac{ER_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$;
2) $i(t) = I\exp\left(-\dfrac{t}{\tau'}\right)$ et $\mathcal{E}_J = \dfrac{1}{2}LI^2$

Ex-E3.8 **Transfert de charge entre deux condensateurs :**

Un condensateur de capacité C est chargé sous une *ddp* E, puis, à $t = 0$, est relié, par fermeture de l'interrupteur K, à un circuit (R, C') série (le condensateur de capacité C' est initialement non chargé).

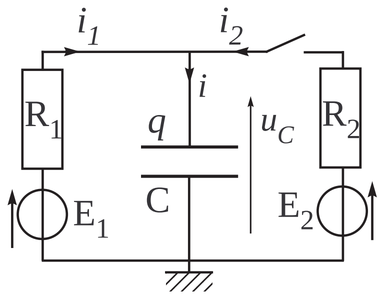
1) Déterminer les variations du courant $i(t)$ de décharge du condensateur C.



2) Calculer la variation d'énergie $\Delta\mathcal{E}$ du système constitué par la résistance R et les deux condensateurs C et C'.
3) Démontrer que $|\Delta\mathcal{E}|$ est aussi l'énergie dissipée par effet JOULE $\mathcal{E}_J$ dans la résistance R.
4) L'expression de $|\Delta\mathcal{E}|$ étant indépendante de R, que se passe-t-il lorsque R tend vers 0 ?

Rép : **1)** $i(t) = \dfrac{E}{R}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ avec $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{R}\left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C'}\right)$; **2)** $\Delta\mathcal{E} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{CC'}{C+C'}E^2$;
3) « $\mathcal{E}_J$ »$= \Delta\mathcal{E}_J = \int_\infty^0 \mathrm{d}\mathcal{E}_J = \int_\infty^0 \mathcal{P}_J \mathrm{d}t = \int_0^\infty Ri^2 \mathrm{d}t = \ldots = |\Delta\mathcal{E}|$

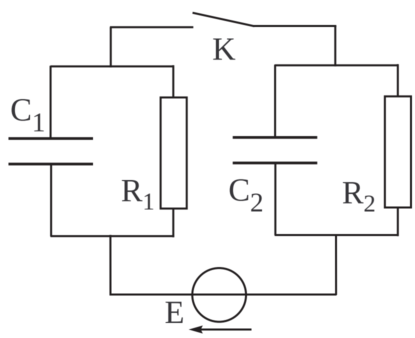
Ex-E3.9 Étude d'un circuit RC avec deux sources



À $t < 0$, le circuit ci-contre a atteint son régime permanent.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.
1) Sans résoudre d'équation différentielle, déterminer les comportements asymptotiques suivants :
a) $i(0^-)$, $i_1(0^-)$, $i_2(0^-)$ et $u_C(0^-)$ à l'instant $t = 0^-$.
b) $i(0^+)$, $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$ et $u_C(0^+)$ à l'instant $t = 0^+$.
c) $i(\infty)$, $i_1(\infty)$, $i_2(\infty)$ et $u_C(\infty)$ à l'instant $t = \infty$.

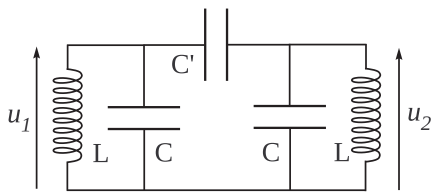
2) Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$.
$\rightarrow$ En déduire $u_C(t)$. On posera $\tau = \dfrac{R_2 R_1 C}{R_1 + R_2}$.
3) Sans calcul supplémentaire, donner les expressions de $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$.

Ex-E3.10 Deux circuits « *RC* parallèle » en série (*)



On étudie le circuit suivant.
À $t = 0$, on ferme K, les deux condensateurs étant initialement déchargés.
$\rightarrow$ Déterminer l'expression de $q_1(t)$, la charge du condensateur de capacité C_1.
On posera $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{C_1 + C_2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$,
$\tau_1 = R_1 C_1$ et $I_0 = \dfrac{E}{R_1 + R_2}$.

Ex-E3.11 Couplage de deux circuits L//C (*)



On considère les deux circuits oscillants (LC) identiques couplés par un condensateur de capacité C'. Lorsqu'on ferme l'interrupteur à $t = 0$ il n'y a aucun courant dans le circuit.

1) Déterminer les équations différentielles vérifiées par $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
2) Établir les équations différentielle vérifiées par $u = u_1 + u_2$ et $v = u_2 - u_1$.
3) Quelles conditions initiales de charge des condensateurs permettent d'obtenir des tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ non nulles ?

Solution Ex-E3.9

1.a) • L'interrupteur ouvert impose $\boxed{i_2(0^-) = 0}$.
• La loi des nœuds conduit à $i(0^-) = i_1(0^-)$.
• **Le régime continu étant établi** depuis suffisamment longtemps pour $t < 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. D'où : $\boxed{i(0^-) = i_1(0^-) = 0}$.
• Le condensateur ayant été chargé sous la tension continue E_1, on en déduit que $\boxed{u_C(0^-) = E_1}$.
(Une simple loi des mailles donne le même résultat).

1.b) • Comme **la charge aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps**, on a

$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = E_1}$$

• La **loi des mailles** dans la première branche ($E_1 - R_1 i_1(0^+) - u_C(0^+) = 0$) conduit à :

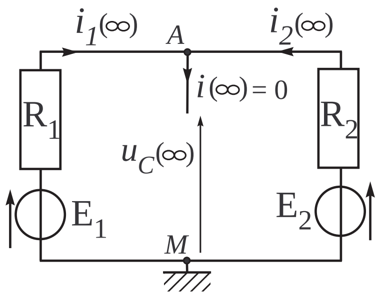
$$\boxed{i_1(0^+) = 0}$$

• La **loi des mailles** dans la seconde branche ($E_2 - R_2 i_2(0^+) - u_C(0^+) = 0$) conduit à :

$$\boxed{i_2(0^+) = \frac{E_2 - E_1}{R_2}}$$

• La **loi des nœuds** conduit à : $\boxed{i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) = \dfrac{E_2 - E_1}{R_2}}$

1.c) • Lorsque $t \to \infty$, le condensateur est à nouveau en régime permanent continu : il se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où $\boxed{i(\infty) = 0}$. On obtient le schéma équivalent ci-contre pour décrire le comportement asymptotique du circuit.



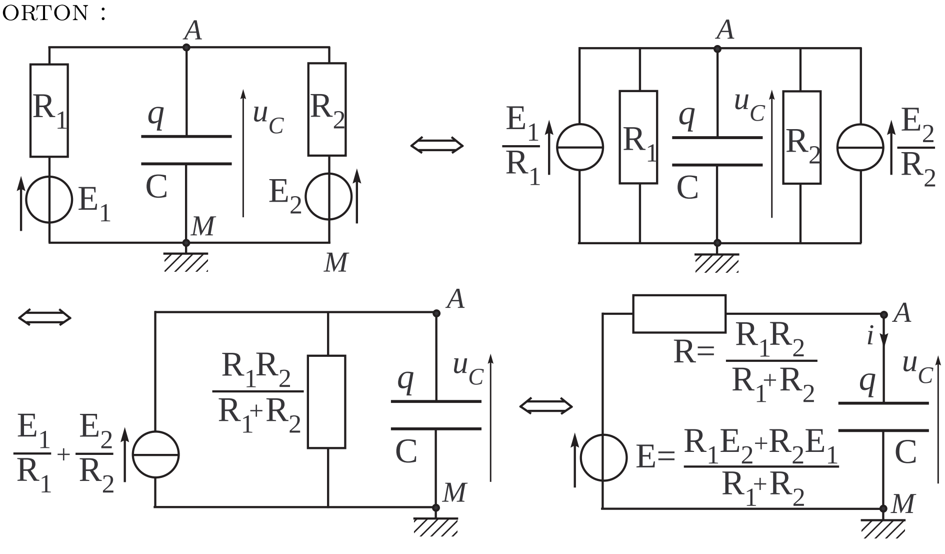
• La loi de Pouillet donne immédiatement :

$$\boxed{i_1(\infty) = -i_2(\infty) = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}}$$

• Et la loi des nœuds en termes de potentiels au point A donne :

$$\frac{V_M - V_A + E_1}{R_1} + \frac{V_M - V_A + E_2}{R_2} + 0 = 0 \quad \text{Soit :} \quad \boxed{u_C(\infty) = V_A - V_M = \frac{R_1E_2 + R_2E_1}{R_1 + R_2}}$$

2) On simplifie le circuit par une série de transformations générateur de Thévenin / générateur de Norton :



• La loi des mailles dans le circuit équivalent final donne :

$$E - Ri - u_C = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}} \ (\star)$$

en posant $\boxed{E = \dfrac{R_1E_2 + R_2E_1}{R_1 + R_2}}$ et $\boxed{R = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}$.

• La solution de $(\star)$ est de la forme $u_C(t) = u_G(t) + u_P$, somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène ($u_G(t)$) et d'une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre (u_P).

• Ce second étant constant, on cherche une solution u_P constante : $\boxed{u_P = E}$

• Ainsi : $\boxed{u_C(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + u_C(\infty)}$ ①

• La constante d'intégration se trouve grâce aux conditions initiales :

$$u_C(0^+) = E_1 = A + E \ \Rightarrow \ \boxed{A = \frac{R_1(E_1 - E_2)}{R_1 + R_2} = u_C(0^+) - u_C(\infty)} \ ②$$

D'où : $\boxed{u_C(t) = \frac{R_1(E_1 - E_2)}{R_1 + R_2}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{R_1E_2 + R_2E_1}{R_1 + R_2}}$

3) Grâce à ① et ② : $\boxed{u_C(t) = (u_C(0^+) - u_C(\infty))\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + u_C(\infty)}$

Or, toutes les grandeurs électriques de ce circuit d'ordre 1 évoluent de la même manière, c'est-à-dire suivant la loi temporelle :

$$x(t) = (x(0^+) - x(\infty))\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + x(\infty)$$

Grâce à la question **1)** , on trouve :

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$$

$$\boxed{i_2(t) = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} + \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2}\frac{R_1}{R_2}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{E_2 - E_1}{R_2}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

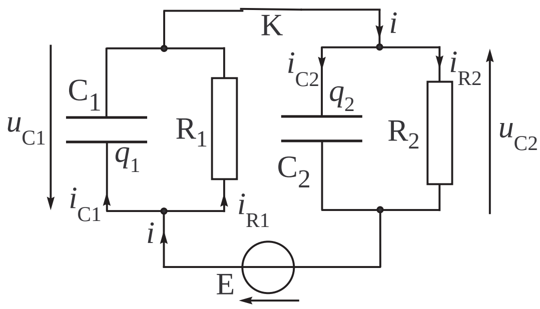
Solution Ex-E3.10

• Loi des nœuds : $i = i_{R_1} + i_{C_1} = \frac{u_{R_1}}{R_1} + \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}$

Et comme $u_{R_1} = u_{C_1} = \frac{q_1}{C_1} \longrightarrow \boxed{i = \frac{q_1}{R_1C_1} + \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}}$ ①

• De même, comme $u_{R_2} = u_{C_2} = \frac{q_2}{C_2}$

$\longrightarrow \boxed{i = \frac{q_2}{R_2C_2} + \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}}$ ②



• Loi des mailles : $E - u_{C_1} - u_{C_2} = 0$

$\hookrightarrow \boxed{q_2 = C_2E - \frac{C_2}{C_1}q_1}$ ③

• ② $\xrightarrow{③}$ $i = \frac{1}{R_2C_2}\left(C_2E - \frac{C_2}{C_1}q_1\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C_2E - \frac{C_2}{C_1}q_1\right)$

$\hookrightarrow \boxed{i = \frac{E}{R_2} - \frac{q_1}{R_2C_1} - \frac{C_2}{C_1}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}}$ ④

• ① $\xrightarrow{④}$ $\boxed{\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_1 + C_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)q_1 = \frac{C_1E}{R_2(C_1 + C_2)}}$

En posant $\frac{1}{\tau} \equiv \frac{1}{C_1+C_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{C_1+C_2}\frac{R_1+R_2}{R_2R_1}$,

et en remarquant qu'alors $\frac{1}{R_2(C_1+C_2)} = \frac{R_1}{\tau(R_1+R_2)}$

on obtient : $\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{\tau} = \frac{R_1C_1}{\tau}\frac{E}{R_1+R_2}$,

soit, avec $\tau_1 = R_1C_1$ et $I_0 = \frac{E}{R_1+R_2}$: $\boxed{\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{\tau} = \frac{\tau_1}{\tau}I_0}$ ⑤

• La solution de cette équation différentielle est de la forme : $q(t) = q_G(t) + q_P$

- où $q_G(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ est la solution générale de l'équation homogène

- et où $q_P = \tau_1 I_0$ est une solution particulière de l'équation de second membre constant.

Ainsi : $q_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \tau_1 I_0$

• Pour déterminer la constante d'intégration A, on a besoin d'une condition initiale. Or, **comme la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps**, on a

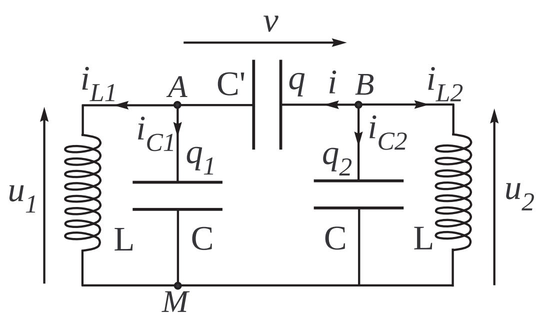
$A + \tau_1 I_0 = q_1(0^+) = q_1(0^-) = 0$, soit $\boxed{A = -\tau_1 I_0}$ et $\boxed{q_1(t) = \tau_1 I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$

Solution Ex-E3.11

1) • Comme $u_1 = L\frac{di_{L_1}}{dt} = \frac{q_1}{C}$ et $i_{C_1} = \frac{dq_1}{dt} = C\frac{du_1}{dt}$,

la loi des nœuds $i = i_{L_1} + i_{C_1}$ conduit à :

$$\boxed{\frac{di}{dt} = \frac{u_1}{L} + C\frac{d^2u_1}{dt^2}} \quad ①$$



• De même comme $u_2 = L\frac{di_{L_2}}{dt} = \frac{q_2}{C}$ et $i_{C_2} = \frac{dq_2}{dt} = C\frac{du_2}{dt}$,

la loi des nœuds $-i = i_{L_2} + i_{C_2}$ conduit à : $\boxed{-\frac{di}{dt} = \frac{u_2}{L} + C\frac{d^2u_2}{dt^2}}$ ②

• Loi des mailles : $u_1 + v + u_2 = 0$, soit : $\boxed{v = u_2 - u_1}$ ③

• $\boxed{i = \frac{dq}{dt} = C'\frac{dv}{dt}}$ ④ et donc : $\boxed{\frac{di}{dt} = C\frac{d^2v}{dt^2}}$.

• ① $\xrightarrow{④}$ $\frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{u_1}{LC} = \frac{C'}{C}\frac{d^2v}{dt^2}$ $\xrightarrow{③}$ $\boxed{\frac{d^2u_1}{dt^2} + \frac{1}{L(C+C')}u_1 = \frac{C'}{C+C'}\frac{d^2u_2}{dt^2}}$ ⑤

• ② $\xrightarrow{④}$ $\frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{u_2}{LC} = -\frac{C'}{C}\frac{d^2v}{dt^2}$ $\xrightarrow{③}$ $\boxed{\frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{1}{L(C+C')}u_2 = \frac{C'}{C+C'}\frac{d^2u_1}{dt^2}}$ ⑥

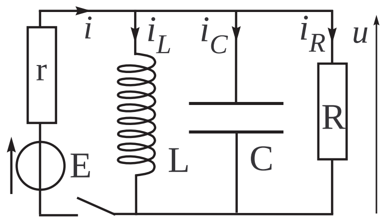
2) • ⑤+⑥ $\rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{u}{L(C+C')} = \frac{C'}{C+C'}\frac{d^2u}{dt^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{u}{LC} = 0}$ $(\star)$

• ⑥ − ⑤ $\rightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{v}{L(C+C')} = -\frac{C'}{C+C'}\frac{d^2v}{dt^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{v}{L(C+2C')} = 0}$ $(\star\star)$

3) Il faut que les condensateurs soient initialement chargés.

DM n^{o}1 : Circuit RLC parallèle

Réponse à un échelon de tension



Sur le schéma du montage ci-contre, le générateur de tension est idéal, de *f.é.m.* E constante. Les résistors sont linéaires, de résistances R et r constantes.
Tant que l'interrupteur est ouvert, le condensateur, de capacité C, est déchargé et la bobine idéale, d'inductance L, n'est parcourue par un aucun courant. À $t = 0$, l'interrupteur est fermé instantanément et on cherche à déterminer l'évolution ultérieure du réseau électrique.

1) Déterminer, par un raisonnement physique simple (pratiquement sans calcul), la tension u et les intensités i, i_L, i_C et i_R dans les quatre branches :

- **a)** juste après la fermeture de l'interrupteur (instant $t = 0^+$),
- **b)** au bout d'une durée très grande ($t \to \infty$).

2) Établir l'équation différentielle liant i_R à ses dérivées par rapport au temps t.

Sources :

[P1] Dominique Meier (dir.), *Toute la Physique Chimie MPSI PTSI*, Ellipses, 2003.
[P2] Jérôme Perez, *Physique MPSI PCSI PTSI*, Cap Prépa, Pearson Education, 2009 .
[P3] Olivier Fiat, *Toute la physique de Sup MPSI PCSI PTSI*, Belin, 2004.
[P4] Pierre Grécias, Jean-Pierre Migeon, *Physique MPSI PCSI*, Méthodes et Annales, Tec&Doc, Lavoisier, 2009.
[P5] Laurent Desmottes, *La physique simplement MPSI PCSI PTSI BCPST*, Nathan, 2009.
[P6] Julien Barthes, *Physique MPSI PCSI PTSI*, Les recettes de Sup, Ellipses, 2008.
[P7] Cyriaque Cholet, *Physique-Chimie MPSI PCSI PTSI*, Interros des prépas, Nathan, 2005.
[P8] Thibaut Cousin, Hervé Perodeau, *Physique Cours compagnon PCSI*, J'intègre, Dunod, 2009.
[PE1] Bernard Gendreau, Christophe Gripon, *Électrocinétique PCSI MPSI PTSI*, Classe Prépa, Nathan, 2006.
[PE2] Nicolas Lescure, Bruno Mombelli, *Électrocinétique avec Maple et Pspice MP PC*, J'intègre, Dunod, 1998.