■ Exercices supplémentaires

Ex-E3.12 **Circuit RC avec 2 générateurs**

Ex-E3.13 **Régime transitoire ps.-périodique d'un circuit** $(L - R /\!/ C)$

} Cf. TD Ma 29/09

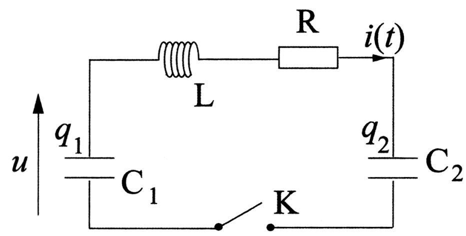
Ex-E3.14 **Suite du DM n°1** [P6/81]

Reprendre l'énoncé du **DM n°1**. Déterminer l'expression numérique complète de $U(t)$ et calculer sa valeur maximale U_{m}.

Données : $r = 2,5\ k\Omega$; $R = 1,25\ k\Omega$; $C = 1\ \mu F$; $L = 20\ mH$; $E = 6,0\ V$.

Ex-E3.15 **Circuit à 2 condensateurs** [P6/85]

Le condensateur C_1 porte initialement la charge Q_1, le condensateur C_2 étant déchargé. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. On suppose que $C_1 = C_2 = C$.



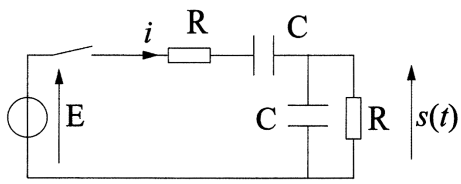
1) Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $u(t)$. On posera $\omega_0^2 = \dfrac{2}{\sqrt{LC}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$.

2) Établir l'expression $u(t)$ pour un régime pseudo-périodique et donner son allure.

Ex-E3.16 **Circuit de Wien** [P6/87]

On suppose que les condensateurs ne sont pas chargés à la date $t = 0$. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

On posera $\tau = RC$.



1) Déterminer les valeurs de s et de $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ pour $t = 0^+$.

2) Montrer que $s(t)$ satisfait à l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{\tau^2} = 0$$

3) Donner l'expression de $s(t)$. On posera $\lambda = \dfrac{\sqrt{5}}{2\tau}$.

Solution Ex-E3.14

➜ Cf. Correction du **DM n°1**.

AN : $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \simeq 7\,071\ rad.s^{-1}}$, $R_0 = \dfrac{r.R}{r+R} \simeq 833\ \Omega$ et $Q = R_0 C \omega_0 = \dfrac{R_0}{L\omega_0} \simeq 5,9$

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

L'équation caractéristique a pour discriminant : $\Delta = \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 \simeq -2.10^9\ s^{-2}$

Les solutions complexes de l'équation caractéristique s'écrivent :

$$r_{1/2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega \text{ avec } \boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q} = 600\ s^1} \text{ et } \boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4}\frac{\omega_0^2}{Q^2}} \simeq 7\,045\ rad.s^{-1} \simeq \omega_0}$$

La solution de l'équation différentielle est de la forme : $i_R = (A.\cos(\omega t) + B.\sin(\omega t)).\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$,

soit : $\dfrac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} = \left[\left(-\dfrac{A}{\tau} + B\omega\right)\cos(\omega t) - \left(\dfrac{B}{\tau} - A\omega\right)\cos(\omega t)\right].\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$

On sait que $\boxed{i_R(0^+) = 0}$

et comme $u = Ri_R = \dfrac{q}{C}$, on a : $\dfrac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{R}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{R}\dfrac{i_C}{C}$ soit : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{E}{r.R.C}}$

Rq : **Attention !** Pour une fonction $f(t)$ ne pas confondre $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(0^+)$ (valeur en $t = 0^+$ de la dérivée d'une fonction) et $\dfrac{\mathrm{d}f(0^+)}{\mathrm{d}t}$ (forcément nulle puisque la dérivée d'une valeur fixe $f(0^+)$ est nulle).

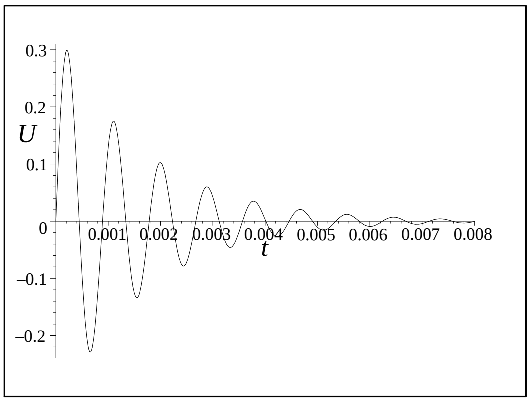
Ici, on a effectivement : $\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}(0^+) \neq \frac{\mathrm{d}i_R(0^+)}{\mathrm{d}t}$

Les 2 constantes d'intégration s'obtiennent à l'aide des 2 conditions initiales :

$$\begin{cases} i_R(0^+) & = A & = 0 \\ \frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}(0^+) & = -\frac{A}{\tau} + B\omega & = \frac{E}{r.R.C} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{E}{\omega.r.R.C} \simeq 2,7.10^{-4}\ A \end{cases}$$

D'où (u étant exprimée en V)

$$\boxed{u(t) = Ri_R(t) \simeq 0,34.\sin(7\,045.t).\exp(-600.t)}$$



La valeur maximale de $u(t)$ est obtenue pour la plus petite valeur t_1 de t tel que :
$\sin(\omega t) = 1$, soit pour $t_1 = \frac{\pi}{2\omega} = 0,22\ ms$.

Alors : $\boxed{U_{\max} = u(t_1) \simeq 0,3\ V}$

Solution Ex-E3.15

Rq : **Attention !** Même si $C_1 = C_2 = C$, il n'y a pas de raison que $q_1 = q_2 = q$! De plus, les conventions récepteur/générateur de l'énoncé imposent : $\forall t,\ i(t) = \frac{q_2}{t} = -\frac{q_1}{t}$ (**signe moins** pour relier i à q_1 !)

1) • On note u_L, u_R et u_C les tensions, en convention récepteur, aux bornes des dipôles R, L et C. La loi des mailles donne : $u = u_L + u_R + u_C$, soit : $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{q_2}{C}$ ①

• On cherche une équation différentielle sur $u(t)$. Il faut donc exprimer i et q_2 en fonction de u. Comme $i = -\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}$ et que $q_1 = C.u$, on a $i = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ ②

• De plus, puisque $i = \frac{q_2}{t} = -\frac{q_1}{t}$ on a : $\frac{\mathrm{d}q_1 + q_2}{\mathrm{d}t} = 0$ soit : $q_1 + q_2 = \mathsf{Cte} = q_1(0^-) + \cancel{q_2(0^-)} = Q_1$

Ainsi, pour chaque instant $t > 0$: $q_2 = Q_1 - q_1 = Q_1 - Cu$ ③

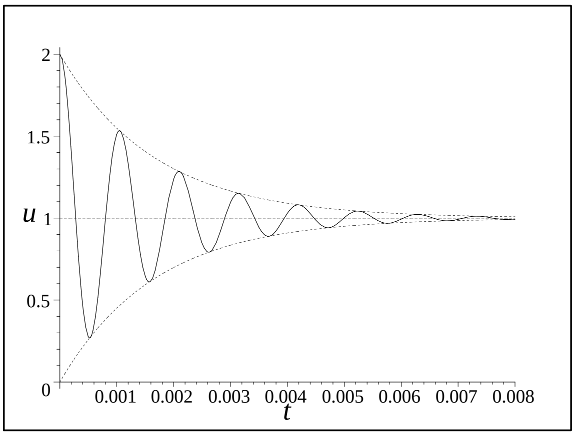
① $\xrightarrow[②]{③}$ $u = -LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} - RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{Q_1}{C} - u \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{LC}u = \frac{Q_1}{LC^2}}$

2) La résolution de cette équation différentielle a déjà été travaillée en classe.

➜ Cf. Correction de **IC n°5, Sujet B**, p. 3.

On en déduit :

$$\boxed{u(t) = \frac{Q_1}{2C}\left[1 + e^{-\gamma t}\left(\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega t)\right)\right]}$$

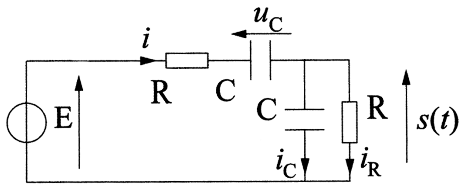


Ci-contre, la courbe tracée pour :
- $\frac{Q_1}{C} = 2\ V$
- $\omega = 6\,000\ rad.s^{-1}$
- et $\gamma = 600\ s^{-1}$.

Solution Ex-E3.16

1) On note $u_R = R.i$ et $u_C = \frac{q_C}{C}$ les tensions aux bornes des dipôles R et C en série dans la branche principale et parcourus, en convention récepteur, par intensité $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$.
On note i_R et i_C les courants traversant R et C en parallèle soumis à la tension $s(t)$ en convention récepteur.

➜ Faire un schéma sur une copie.



• Par continuité de la charge aux bornes d'un condensateur $\dfrac{q(0^-)}{C} = s(0^-) = s(0^+)$.

Comme $q(0^-) = 0$, on a $\boxed{s(0^+) = 0}$.

De même $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$.

• La loi des mailles s'écrit : $E = Ri + u_C + s$.

La loi des nœuds s'écrit : $i = i_R + i_C = \dfrac{s}{R} + C\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

On en déduit : $E = R\left(\dfrac{s}{R} + C\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) + u_C + s \quad \star$

Soit : $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{E - \cancel{u_C(0^+)} - 2\cancel{s(0^+)}}{RC}$ soit : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{E}{\tau}}$ en posant $\boxed{\tau = RC}$.

2) En dérivant l'équation $\star$: $RC\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + 2\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$

Or : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{i}{C} = \dfrac{s}{RC} + \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$

Soit : $RC\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + 3\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{RC} = 0 \rightarrow$ D'où : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{3}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau^2} = 0}$

3) La résolution de cette équation différentielle a déjà été travaillée en classe.

➜ Cf. Correction de **IC n°5, Sujet A**, p. 2.

On en déduit :

$$\boxed{s(t) = \frac{E}{\sqrt{5}}\left(\exp\left[\left(-\frac{3}{2\tau} + \lambda\right)t\right] - \exp\left[\left(-\frac{3}{2\tau} - \lambda\right)t\right]\right) = \frac{2E}{\sqrt{5}}.\sinh(\lambda t).\exp\left(-\frac{3t}{2\tau}\right)}$$

On en déduit :

$$\boxed{s(t) = \frac{E}{\sqrt{5}}\left(\exp\left[\left(-\frac{3}{2\tau} + \lambda\right)t\right] - \exp\left[\left(-\frac{3}{2\tau} - \lambda\right)t\right]\right)}$$

Soit : $\boxed{s(t) = \dfrac{2E}{\sqrt{5}}.\sinh(\lambda t).\exp\left(-\dfrac{3t}{2\tau}\right)}$

Ci-contre, la courbe tracée pour : $\dfrac{1}{\tau} = 2\ s^{-1}$ et $E = 6\ V$