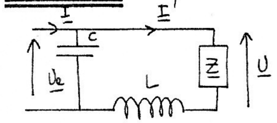
EXE 4-7



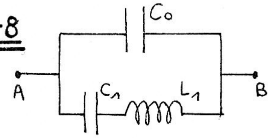
$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}'$ avec $\underline{I}' = \dfrac{\frac{1}{jC\omega}}{jL\omega + \underline{Z} + \frac{1}{jC\omega}}\,\underline{I}$ (Diviseur de Courant)

$\underline{I}' = \dfrac{1}{1 - LC\omega^2 + jC\omega\underline{Z}}\,\underline{I} \rightarrow \underline{U} = \dfrac{\underline{Z}}{1 - LC\omega^2 + jC\omega\underline{Z}}\,\underline{I}$

$\boxed{LC\omega^2 = 1} \Rightarrow \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{1}{jC\omega} \Rightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}\right| = \dfrac{1}{C\omega} \\ \varphi_u - \varphi_i = \arg\left(\dfrac{1}{jC\omega}\right) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Ce qui ne dépend pas de $\underline{Z}$

EXE 4-8



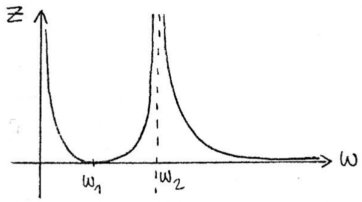
L'Impédance complexe du dipôle AB est égale à :

$$\underline{Z} = \frac{\frac{1}{jC_0\omega}\left(\frac{1}{jC_1\omega} + jL_1\omega\right)}{\frac{1}{jC_0\omega} + \frac{1}{jC_1\omega} + jL_1\omega} = \frac{1 - L_1C_1\omega^2}{jC_1\omega + jC_0\omega - jL_1C_1C_0\omega^3}$$

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{1 - L_1C_1\omega^2}{j\left([C_0 + C_1]\omega - L_1C_1C_0\omega^3\right)}}$$

$Z = |\underline{Z}| = \left|\dfrac{1 - L_1C_1\omega^2}{(C_0 + C_1)\omega - L_1C_1C_0\omega^3}\right| = \left|\dfrac{N(\omega)}{D(\omega)}\right|$

- On a une singularité pour $N(\omega) = 0$ soit $\boxed{\omega = \omega_1 = \dfrac{1}{\sqrt{L_1C_1}}}$
- " " pour $D(\omega) = 0$ soit $C_0 + C_1 = L_1C_1C_0\omega$ soit $\boxed{\omega = \omega_2 = \omega_1\sqrt{1 + \frac{C_1}{C_0}}}$



- $\begin{cases} \omega \to 0 & |\underline{Z}| = Z \to +\infty \\ \omega \to \pm\omega_2 & \to +\infty \\ \omega \to +\infty & \to 0^+ \end{cases}$ $\quad Z = \left|\dfrac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{(C_0 + C_1)\omega\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right)}\right|$

		ω_1		ω_2	
$N(\omega)$	+	0	−		−
$D(\omega)$	+		+		−
$\frac{N(\omega)}{D(\omega)}$	+	0	−		+

EXE 4.9

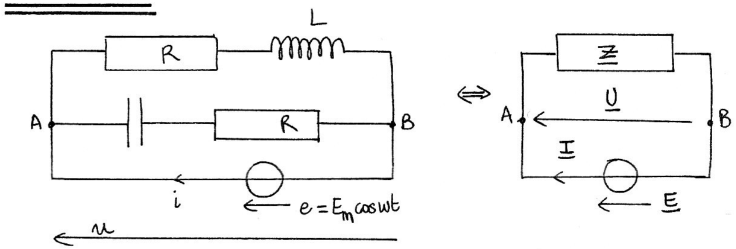
* Impédance d'un condensateur :

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{j\frac{\underline{\varepsilon}}{\varepsilon_0}C_0\omega} = \frac{1}{j(x' - jx'')C_0\omega} = \frac{1}{jC_0x'\omega + x''C_0\omega}$$

* l'Impédance d'un dipole RC// est : $\underline{Z} = \left(\dfrac{1}{jC\omega}\right) /\!/ R = \dfrac{\frac{R}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \dfrac{1}{jC\omega + \frac{1}{R}}$

Par identification on en déduit : $\boxed{R = \dfrac{1}{x''C_0\omega} \qquad C = C_0x'}$

EXE 4-10 :



$\underline{Z} = (R + jL\omega) /\!/ \left(R + \dfrac{1}{jC\omega}\right)$

$$\underline{Z} = \frac{(R + jL\omega)\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)}{R + jL\omega + R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{(R + jL\omega)(jRC\omega + 1)}{2jRC\omega + 1 - LC\omega^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} = \frac{R(1 - LC\omega^2) + j(L\omega + R^2C\omega)}{1 - LC\omega^2 + j\,2RC\omega}}$$

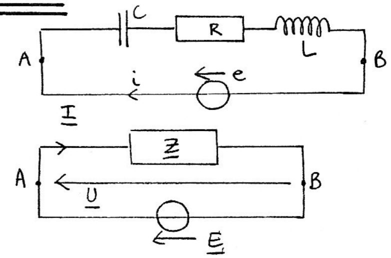
lorsque u et i sont en phase $\forall\omega$, alors $\arg\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \varphi_u - \varphi_i = 0 = \arg\underline{Z} = \arg N - \arg D = 0$

soit $\arg N(\omega) = \arg D(\omega)$ soit $\tan\arg N(\omega) = \tan\arg D(\omega)$ $\forall\omega$: $\dfrac{L\omega + R^2C\omega}{R(1 - LC\omega^2)} = \dfrac{2RC\omega}{1 - LC\omega^2}$

d'où : $L\omega + R^2C\omega = 2R^2C\omega$ soit $\omega L = R^2C\omega$ soit $\boxed{R = \sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

Alors : $\boxed{\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z} = \dfrac{R(1 - LC\omega^2) + j\,2R^2C\omega}{1 - LC\omega^2 + j\,2RC\omega} = R}$

EXE 4-11 :



- $\boxed{\underline{Z} = \dfrac{1}{jC\omega} + R + jL\omega = R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$

$\begin{matrix} e = E_m\cos\omega t \\ i = I_m\cos(\omega t + \varphi_i) \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} \underline{e} = \underline{E}\,e^{j\omega t} \\ \underline{i} = \underline{I}\,e^{j\omega t} \end{cases}$ $\quad \underline{E} = E_m$ $\quad \underline{I} = I_m e^{j\varphi_i}$

- le Facteur de puissance est $\cos\phi = \cos(\varphi_u - \varphi_i)$:

On a $\varphi_u - \varphi_i = \arg\left(\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}\right) = \arg\underline{Z}$ d'où $\boxed{\cos\phi = \dfrac{\mathrm{Re}\,\underline{Z}}{|\underline{Z}|} = \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}}$ $\quad$ AN : $\cos\phi = 0{,}02$

- Puissance Moyenne reçue par le dipôle :

$\langle P \rangle = \langle u.i \rangle = U_m I_m \langle \cos\omega t.\cos(\omega t - \phi) \rangle = U_m I_m \langle \frac{1}{2}\cos(\omega t - \omega t + \phi) + \frac{1}{2}\cos(\omega t + \omega t - \ldots$

$\langle P \rangle = \dfrac{U_m I_m}{2}\cos\phi$

Reg Sinusoïdal

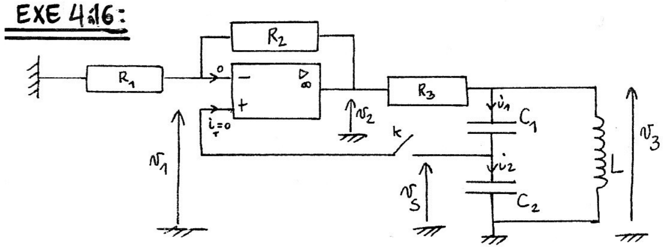
$U_m I_m = |\underline{U}|.|\underline{I}| = |\underline{U}|\dfrac{|\underline{U}|}{|\underline{Z}|} = \dfrac{U_m^2}{|\underline{Z}|} = \dfrac{2U_{eff}^2}{|\underline{Z}|} \rightarrow \boxed{\langle P \rangle = \dfrac{R\,E_{eff}^2}{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$ $\quad$ AN : $\langle P \rangle = 1\,mW$

$\langle P \rangle = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2U_{eff}^2}{|\underline{Z}|}\,\dfrac{\mathrm{Re}\,\underline{Z}}{|\underline{Z}|}$ avec $U_{eff} = E_{eff}$ $\qquad \langle P \rangle = \dfrac{R\,U_{eff}^2}{|\underline{Z}|^2}$

Rque : $\langle P\rangle = \frac{R\,U_{eff}^2}{|Z|^2}$ avec $\frac{U_{eff}}{|Z|} = \frac{U_m}{\sqrt2\,|Z|} = \frac{1}{\sqrt2}\left|\frac{\underline U}{\underline Z}\right| = \left|\frac{\underline I}{\sqrt2}\right| = \frac{I_m}{\sqrt2} = I_{eff} \to \langle P\rangle = R I_{eff}^2$.

↳ Seule la résistance R reçoit effectivement de la puissance. On constate qu'on obtient le m̂ résultat que si on avait un générateur de tension continue qui envoie un courant I_{eff}.

EXE 4.16 :



1) K ouvert : • Il n'y a pas de générateur, mais on fait pour l'instant l'hypothèse que les tensions sont des f° sinusoïdales

• $i_+ = i_- = 0$ AO idéal ; $\varepsilon = v_+ - v_- = 0$ rég linéaire

↳ $v_1 = v_+ = v_- = \frac{R_1}{R_1+R_2}\,v_2$

→ (1) $\boxed{\frac{\underline V_2}{\underline V_1} = \frac{R_1+R_2}{R_1}}$ Valable car $i_-=0$

• v_3 tension aux bornes de l'impédance cplexe $\underline Z = (C_1$ en série avec $C_2) // (jL\omega)$

C_1 en série avec C_2 équivaut à un condensateur de capacité $C_{eq} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$

d'où $\underline Z = \left(\frac{1}{jC_e\omega}\right) // (jL\omega) = \frac{\frac{1}{jC_e\omega}\,jL\omega}{\frac{1}{jC_e\omega}+jL\omega} = \frac{jL\omega}{1-LC_e\omega^2}$

(2) $\boxed{\frac{\underline V_3}{\underline V_2} = \frac{\underline Z}{\underline Z+R_3} \quad \text{avec } \underline Z = \frac{jL\omega}{1-LC_e\omega^2} \text{ et } C_e = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2}}$ Valable car $i_1 = i_2$

• v_S est la tension aux bornes de C_2 en série avec C_1 aux bornes desquels on a v_3.

$$\frac{\underline V_S}{\underline V_3} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}}{\frac{1}{jC_2\omega}+\frac{1}{jC_1\omega}} = \frac{jC_1\omega}{jC_1\omega + jC_2\omega}$$

(3) $\boxed{\frac{\underline V_S}{\underline V_3} = \frac{C_1}{C_1+C_2}}$ Valable car $i_1=i_2$

2) K fermé : On a toujours $i_-=0$ et $i_1=i_2$ car $i_+=0$ → les 3 relations de 1) sont encore valables ; de plus on en a une quatrième qui est : $\boxed{(4)\ v_S = v_1 \quad \frac{\underline V_1}{\underline V_S} = 1}$

d'où (1).(2).(3) ⇒ $\underbrace{\frac{\cancel{\underline V_2}}{\underline V_1}\cdot\frac{\cancel{\underline V_3}}{\cancel{\underline V_2}}\cdot\frac{\underline V_S}{\cancel{\underline V_3}}} = \frac{\underline V_S}{\underline V_1} \underset{(4)}{=} 1$

$$\frac{R_1+R_2}{R_1}\cdot\frac{\underline Z}{\underline Z+R_3}\cdot\frac{C_1}{C_1+C_2} = 1 \quad \text{d'où} \quad \frac{\underline Z+R_3}{\underline Z} = 1 + \frac{R_3}{\underline Z} = \frac{R_1+R_2}{R_1}\,\frac{C_1}{C_1+C_2}$$

Soit : $1 + \frac{R_3}{jL\omega}(1-LC_e\omega^2) = \frac{R_1+R_2}{R_1}\,\frac{C_1}{C_1+C_2}$ Soit, en identifiant parties réelles et imaginaires de part et d'autre de l'équation

$$\begin{cases} \frac{R_1+R_2}{R_1}\,\frac{C_1}{C_1+C_2} = 1 \Leftrightarrow 1+\frac{R_2}{R_1} = 1+\frac{C_2}{C_1} \Leftrightarrow \boxed{① \ \frac{R_2}{R_1} = \frac{C_2}{C_1}} \\ -\frac{R_3}{L\omega}(1-LC_e\omega^2)=0 \Leftrightarrow 1-LC_e\omega^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{② \ \omega = \frac{1}{\sqrt{LC_e}} = \sqrt{\frac{C_1+C_2}{LC_1C_2}}} \end{cases}$$

lorsque la condition ① est vérifiée, on observe des tensions v_1, v_2, v_3, v_S sinusoïdales de pulsation ω donnée par la relat° ② sans aucun générateur présent dans le circuit (en réalité l'énergie électrique nécessaire provient des alim. ±15V de l'AO).

↳ On a construit un oscillateur.

EXE 4.12

$$\begin{cases} e(t) = E_m\cos\omega t \\ u(t) = U_m\cos(\omega t+\varphi_u) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline E = E_m \\ \underline U = U_m e^{j\varphi_u} \end{cases} \qquad V_B - V_A = -\underline U$$

Loi des noeuds en termes de potentiels en A : $\frac{V_B-V_A+\underline E}{\frac{1}{jC\omega}} + \frac{V_B-V_A}{R} + \frac{V_B-V_A}{R_u} = 0$

$\underline U\left(jC\omega + \frac1R + \frac1{R_u}\right) = jC\omega\,\underline E$

$\underline U = \frac{jC\omega}{jC\omega + \frac{1}{R_0}}\,\underline E$ avec $\frac1{R_0} = \frac1R+\frac1{R_u}$ soit $R_0 = R//R_u = \frac{RR_u}{R+R_u}$

$\underline U = \frac{jR_0C\omega}{jR_0C\omega+1}\,\underline E$ on introduit $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}}$ → $\underline U = \frac{jx}{1+jx}\,\underline E = \frac{x}{x-j}\,\underline E = \frac{x}{x^2+1}(x+j)$

$|\underline U| = U_m$

$\varphi_u = \arg(\underline U)$

$= \arg(x+j)$

$= \arctan\frac1x$

$$\boxed{\begin{array}{l} u(t) = U_m\cos(\omega t+\varphi_u) \\ \text{avec} \left| \begin{array}{l} U_m = \frac{E_m x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{E_m\omega}{\sqrt{\omega_0^2+\omega^2}} \\ \varphi_u = \arctan\frac1x \quad \text{soit} \quad \underset{\omega\to+\infty}{0} \leqslant \varphi_u \leqslant \underset{\omega\to 0}{\frac{\pi}{2}} \end{array} \right. \end{array}}$$

• Avec les notations des intensités sur le schéma on a, en réels : $i = \frac{dq}{dt} = i_R + i_u$

avec $q = C(e-u)$ ↳ $C\left(\frac{de}{dt} - \frac{du}{dt}\right) = \frac uR + \frac u{R_u} = \frac u{R_0}$

soit : $\frac{du}{dt} + \omega_0 u = \frac{de}{dt} = -E_m\omega\sin\omega t$.

↓ $\underline U[j\omega+\omega_0] = +j\omega\,\underline E \longrightarrow \underline U = \frac{j\omega}{j\omega+\omega_0}\,\underline E = \frac{jx}{jx+1}\,\underline E$.

etc

• On aurait pu tout aussi bien écrire : $\underline U = \frac{\underline Z}{\underline Z+\frac1{jC\omega}}\,\underline E$ avec $\underline Z = R_0 = (R//R_u)$

soit : $\underline U = \frac{R_0}{R_0+\frac{1}{jC\omega}}\,\underline E = \frac{jR_0C\omega}{jR_0C\omega+1}\,\underline E$.

etc.