■ Comment aborder l'étude du régime transitoire d'un circuit ?

❏ **Méthode 1.—** De manière générale :

✥ Lire l'énoncé. Ouvre-t-on ou ferme-t-on l'interrupteur à $t = 0$?

✥ Établir la (les) condition(s) initiale(s) (règles de continuité) à $t = 0$.

✥ Il est souvent souhaitable de faire d'abord une étude qualitative en déterminant les régimes établis à $t = 0^-$ et $t \to +\infty$, les schémas simplifiés associés s'obtenant facilement en régime continu puisqu'il suffit alors de remplacer les condensateurs par des interrupteurs ouverts et les bobines par des fils.

✥ Quand cela est possible, simplifier le circuit à l'aide de transformations Thévenin/Norton et d'associations de générateurs, de résistances, d'inductances ou de capacités.
Toute simplification qui ferait disparaître l'interrupteur ou une variable dont on demande l'expression est à proscrire !

✥ Définir sur le schéma toutes les variables électriques à utiliser : tensions, courants, charges, en les différenciant clairement par des indices adaptés. En particulier :
→ préciser le sens de chaque courant et l'armature qui porte la charge q
→ éviter d'introduire des variables qui ne sont pas strictement nécessaires, telles que les tensions aux bornes de chaque dipôle, les charges si aucune question ne s'y rapporte, ou certains courants qui peuvent s'écrire en fonction d'autres par une loi des nœuds implicite.

✥ Regrouper sous forme d'un système toutes les équations nécessaires :
→ lois constitutives de chaque dipôle passif (autant que de dipôles).
→ lois des noeuds (autant que de noeuds indépendants)
→ lois des mailles (autant que de mailles indépendantes)
Ce faisant :
- s'efforcer de faire apparaître au maximum la grandeur étudiée
- faire attention à la convention (récepteur ou générateur) imposée à chaque dipôle par les orientations des mailles.

✥ Établir l'équation différentielle à partir du système d'équations précédent. Pour cela, substituer les variables en commençant par celles qui apparaissent dans les équations les plus courtes (relations tension/courant spécifique aux divers dipôles, loi des nœuds), et réduire ainsi le nombre d'équations jusqu'à en obtenir une seule.

✥ Identifier le type d'équation différentielle (ordre, 2$^{\text{d}}$ membre) puis :
→ déterminer la *solution particulière* de l'équation différentielle avec 2$^{\text{d}}$ membre
→ écrire la *solution générale* de l'équation différentielle sans second membre (expression à connaître par cœur)
→ la(les) constante(s) d'intégration se détermine(nt) à l'aide de la (des) condition(s) initiale(s), **lesquelles doivent être appliquées à la solution totale** (sol. particulière + sol. générale).

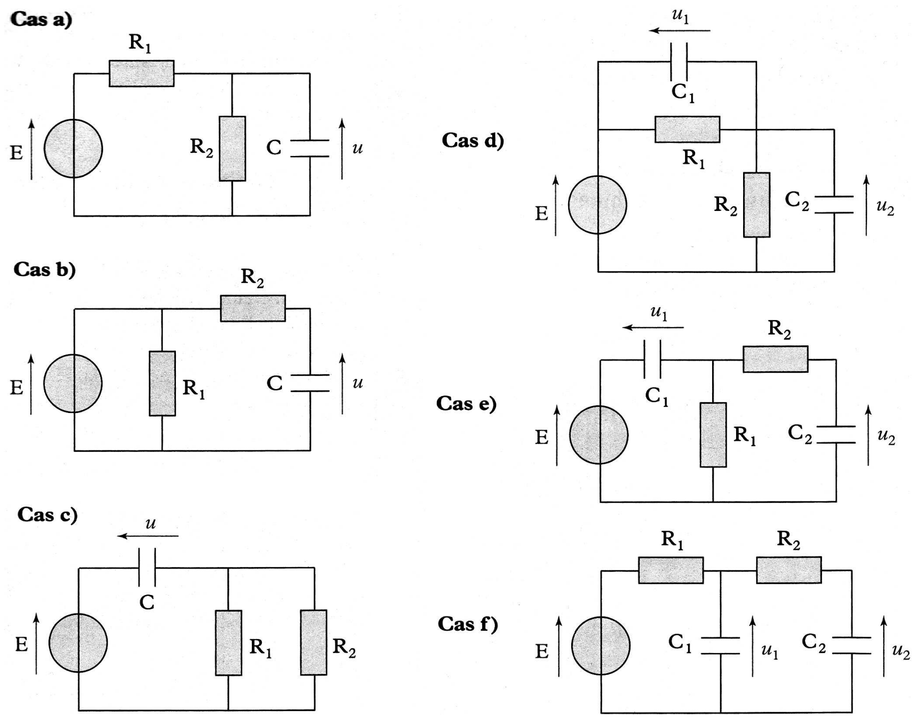
Ex-E3.1 Résistance d'un voltmètre

Un condensateur chimique de capacité $C = 47\ \mu F$ est chargé sous une tension $E = 4,5\ V$. On le branche aux bornes d'un voltmètre.
À l'instant $t = 0$, on mesure normalement $u_C(t = 0) = E = 4,5\ V$.
À l'instant $t = t_1 = 200\ s$, on lit sur le voltmètre : $u_C(t_1) = u_1 = 3\ V$.
Q : Quelle est la résistance du voltmètre ?

Rép : $R = \dfrac{t}{C.\ln\left(\dfrac{u_0}{u_C(t)}\right)} = \dfrac{t_1}{C.\ln\left(\dfrac{E}{u_1}\right)} = 10,5\ M\Omega$

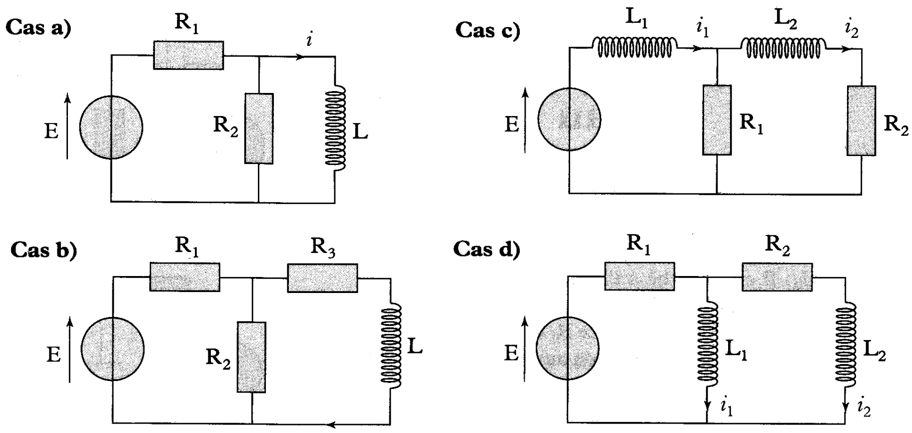
Ex-E3.2 **Régimes permanents avec des condensateurs**

Dans les montages ci-contre, déterminer la (ou les) tension(s) aux bornes du (ou des) condensateur(s) lorsque le régime permanent est établi.



Ex-E3.3 **Régimes permanents avec des bobines**

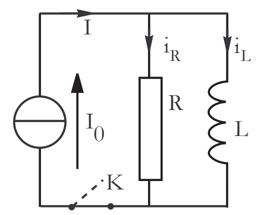
Dans les montages ci-contre, déterminer l'intensité du courant circulant dans chaque bobine lorsque le régime permanent est établi.

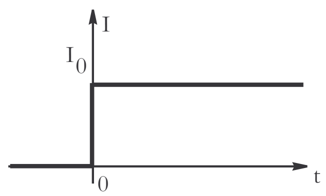


Ex-E3.4 **Circuit d'ordre 1 (1)**

Exprimer $i_R(t)$ et $i_L(t)$, puis tracer les courbes représentatives.

On posera $\tau = \dfrac{L}{R}$.





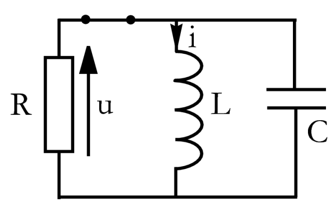
Rép : $i_L(t) = I\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$ et $i_R(t) = I\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$.

Ex-E3.5 **Circuit RLC parallèle**

1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par i en fonction de : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q_0 = RC\omega_0$.

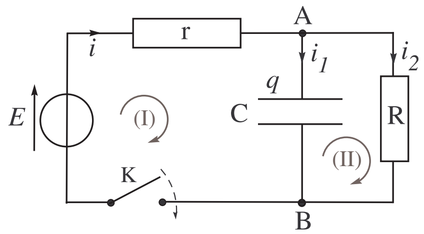
2) On pose $\lambda = \dfrac{1}{2Q_0}$. Déterminer $i(t)$ sachant que $i(t=0) = i_0 \neq 0$ et $u(t=0) = 0$.

On distinguera trois cas : **a)** $\lambda = 1$, **b)** $\lambda > 1$ et **c)** $\lambda < 1$.



Rép : **1)** $\dfrac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i = 0$ avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = RC\omega_0 = \dfrac{R}{L\omega_0}$;
2.a) $\lambda > 1 : i(t) = \dfrac{i_0}{r_1 - r_2}\left(-r_2 e^{r_1 t} + r_1 e^{r_2 t}\right)$ avec $r_{1/2} = -\lambda\omega_0 \mp \omega_0\sqrt{\lambda^2 - 1}$; **2.b)** $\lambda = 0 : i(t) = i_0(1 + \lambda\omega_0 t)e^{-\lambda\omega_0 t}$; **2.c)** $\lambda < 1 : i(t) = i_0(\cos\omega t + \dfrac{\sin\omega t}{\tau\omega})\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = \dfrac{1}{\lambda\omega_0}$ et $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \lambda^2}$.

Ex-E3.6 **Circuit d'ordre 1 (2)**



Dans le circuit représenté ci-contre on ferme l'interrupteur K à la date $t = 0$, le condensateur étant initialement déchargé.

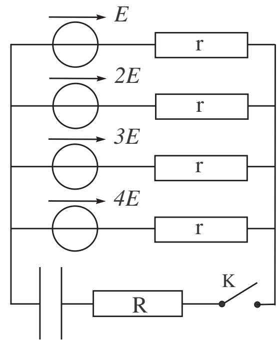
1) Établir l'expression de $q(t)$ où q est la charge du condensateur, en déduire i_1, i_2 et i en fonction du temps.

2) Calculer à la date t_1 l'énergie stockée dans le condensateur.

3) Écrire sous la forme d'une somme d'intégrales un bilan d'énergie entre les dates 0 et t_1.

Rép : **1)** En posant $\tau = \dfrac{CRr}{R+r}$: $q(t) = \dfrac{ECR}{R+r}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$; $i_1(t) = \dfrac{E}{r}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$; $i_2(t) = \dfrac{E}{R+r}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$; $i(t) = \dfrac{E}{R+r}\left(1 + \dfrac{R}{r}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$.

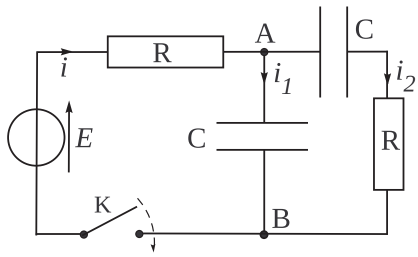
Ex-E3.7 **Circuit d'ordre 1 (3)**



Déterminer l'intensité du courant $i(t)$ dans le condensateur, ainsi que la tension $u(t)$ à ses bornes sachant que l'on ferme l'interrupteur à la date $t = 0$ et que le condensateur n'est pas chargé initialement. Représenter graphiquement $i(t)$ et $u(t)$.

Rép : $i(t) = \dfrac{10E}{4R+r}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ avec $\tau = C\left(R + \dfrac{r}{4}\right)$; $u(t) = \dfrac{5E}{2}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$.

Ex-E3.8 **Régime transitoire apériodique (*)**



À $t = 0^-$, les condensateurs sont déchargés. On ferme alors l'interrupteur K.

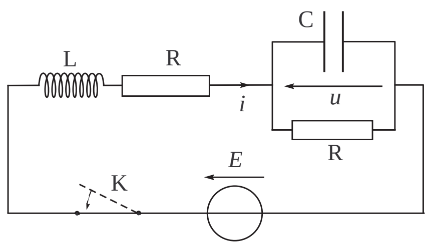
1) Établir l'équation différentielle en i_1.

2) Déterminer les conditions initiales $i_1(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

3) Exprimer $i_1(t)$.

Rép : **1)** i_1 vérifie l'équation canonique d'ordre 2 avec $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$ et $Q = \dfrac{1}{3}$; **2)** $i_1(0^+) = \dfrac{E}{R}$ et $\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}(0^+) = -\dfrac{2E}{CR^2}$; **3)** $i_1(t) = \dfrac{E}{R}\left[\mathrm{ch}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2RC}t\right) - \dfrac{1}{\sqrt{5}}.\mathrm{sh}\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2RC}t\right)\right]\exp\left(-\dfrac{3t}{2RC}\right)$

Ex-E3.9 **Bobine et condensateur réels en série (*)**



Le montage ci-contre modélise une bobine réelle (L, R) en série avec un condensateur réel (C, R) initialement déchargé. On ferme l'interrupteur K à la date $t = 0$

On impose la relation suivante : $\tau = \dfrac{L}{R} = RC$.

Initialement : $i(0^-) = 0$ et $u(0^-) = 0$.

1) Déterminer $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$

2) Établir l'équation différentielle régissant $u(t)$ — tension aux bornes du condensateur lorsque le circuit est branché, à $t = 0$, sur un générateur de tension E — sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{\tau}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{\tau^2}u = \frac{E}{\tau^2}$$

3) Déterminer $u(t)$ pour $t \geq 0$.

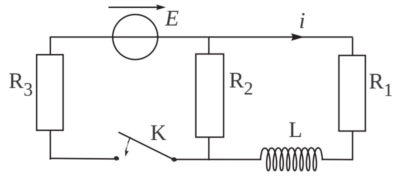
4) Déterminer $i(t)$, intensité circulant dans la bobine. Représentation graphique de $i(t)$.

5) Peut-on prévoir le régime permanent sans calcul ? Si oui, déterminer U, tension aux bornes du condensateur, et I, courant dans la bobine, en régime permanent.

6) Déterminer le facteur de qualité Q de ce circuit. vérifier que sa valeur est en accord avec la nature du régime transitoire.

Rép : **1)** Exprimer $u = u_C$, $u = u_R$ et la loi des nœuds en fonction de i, u et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Conclure ; **3)** $u(t) = \frac{E}{2} - \frac{E}{2}\left(\cos\frac{t}{\tau} + \sin\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$; **4)** $i(t) = \frac{E}{2R}\left[1 + \left(-\cos\frac{t}{\tau} + \sin\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$; **5)** Faire un schéma équivalent du montage lorsque le régime permanent continu est atteint : $I = \frac{E}{2R}$ et $U = \frac{E}{2}$; **6)** $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$, donc régime transitoire pseudo-périodique.

Ex-E3.10 Trois résistances et une bobine



Le circuit étudié comporte trois résistances R_1, R_2 et R_3, une bobine parfaite d'inductance L, un générateur de *f.é.m.* E et un interrupteur K.

1) Initialement, la bobine n'est parcourue par aucun courant. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interupteur K.

→ Établir la loi d'évolution de $i(t)$ et déterminer le courant I en régime permanent dans la bobine. On posera $\tau = \frac{L(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$.

2) Le courant d'intensité I est établi, on ouvre à $t = 0$ (réinitialisation du temps !).

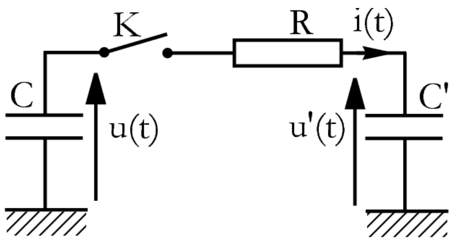
→ Déterminer la nouvelle loi donnant $i(t)$ et l'énergie dissipée par effet JOULE dans les résistances. On posera $\tau' = \frac{L}{R_1 + R_2}$.

Rép : **1)** $i(t) = I\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ avec $I = \frac{ER_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$;
2) $i(t) = I\exp\left(-\frac{t}{\tau'}\right)$ et $\mathcal{E}_J = \frac{1}{2}LI^2$

Ex-E3.11 Transfert de charge entre deux condensateurs :

Un condensateur de capacité C est chargé sous une *ddp* E, puis, à $t = 0$, est relié, par fermeture de l'interrupteur K, à un circuit (R, C') série (le condensateur de capacité C' est initialement non chargé).

1) Déterminer les variations du courant $i(t)$ de décharge du condensateur C.



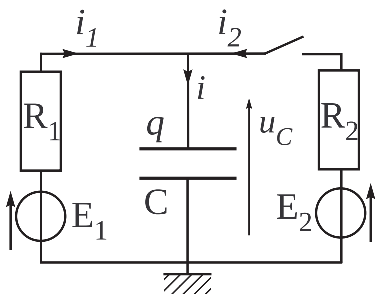
2) Calculer la variation d'énergie $\Delta\mathcal{E}$ du système constitué par la résistance R et les deux condensateurs C et C'.

3) Démontrer que $|\Delta\mathcal{E}|$ est aussi l'énergie dissipée par effet JOULE $\mathcal{E}_J$ dans la résistance R.

4) L'expression de $|\Delta\mathcal{E}|$ étant indépendante de R, que se passe-t-il lorsque R tend vers 0 ?

Rép : **1)** $i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ avec $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right)$; **2)** $\Delta\mathcal{E} = -\frac{1}{2}\frac{CC'}{C + C'}E^2$;
3) « $\mathcal{E}_J$ »$= \Delta\mathcal{E}_J = \int_\infty^0 \mathrm{d}\mathcal{E}_J = \int_\infty^0 \mathcal{P}_J\mathrm{d}t = \int_0^\infty Ri^2\mathrm{d}t = \ldots = |\Delta\mathcal{E}|$

Ex-E3.12 Étude d'un circuit RC avec deux sources



À $t < 0$, le circuit ci-contre a atteint son régime permanent.
À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1) Sans résoudre d'équation différentielle, déterminer les comportements asymptotiques suivants :

a) $i(0^-)$, $i_1(0^-)$, $i_2(0^-)$ et $u_C(0^-)$ à l'instant $t = 0^-$.

b) $i(0^+)$, $i_1(0^+)$, $i_2(0^+)$ et $u_C(0^+)$ à l'instant $t = 0^+$.

c) $i(\infty)$, $i_1(\infty)$, $i_2(\infty)$ et $u_C(\infty)$ à l'instant $t = \infty$.

2) Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$.

→ En déduire $u_C(t)$. On posera $\tau = \frac{R_2R_1C}{R_1 + R_2}$.

3) Sans calcul supplémentaire, donner les expressions de $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i(t)$.

Ex-E3.13 **Deux circuits « *RC* parallèle » en série (*)**

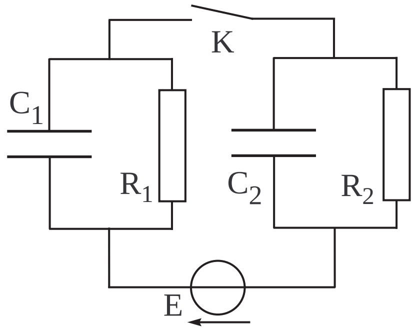
On étudie le circuit suivant.

À $t = 0$, on ferme K, les deux condensateurs étant initialement déchargés.

→ Déterminer l'expression de $q_1(t)$, la charge du condensateur de capacité C_1.

On posera $\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{1}{C_1 + C_2}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$,

$\tau_1 = R_1 C_1$ et $I_0 = \dfrac{E}{R_1 + R_2}$.



Solution Ex-E3.2

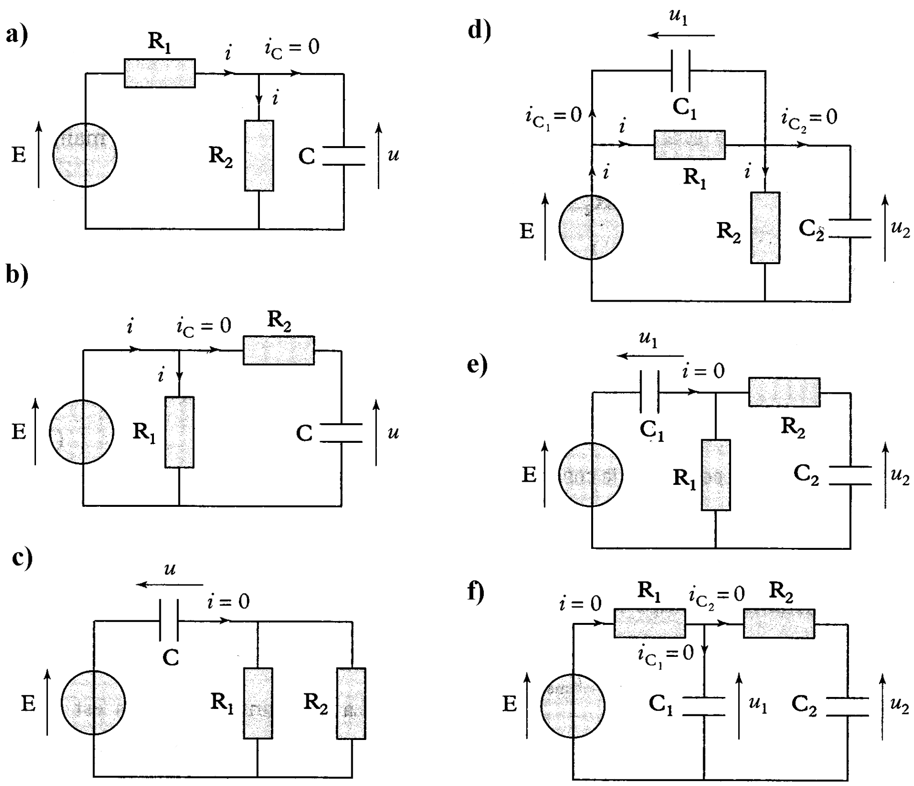
En régime continu, la tension aux bornes d'un condensateur est constante et l'intensité qui le traverse est nulle — puisque **les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts.**

a) Tout le courant passant dans R_1 passe dans R_2, comme si le condensateur n'était pas présent et donc comme si les résistances étaient en série. D'après le **diviseur de tension** :

$$\boxed{u = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.E}$$

b) Le courant dans R_2 est nul. La tension u se retrouve entièrement aux bornes de R_1. On a donc : $\boxed{u = E}$.

c) Aucun courant ne traverse R_1 ou R_2. La tension aux bornes de ces résistances en parallèle est donc nulle et on a (loi des mailles) : $\boxed{u = E}$.



d) Les courants à travers C_1 et C_2 sont nuls, toute l'intensité qui traverse R_1 traverse également R_2 comme si elles étaient en série. D'après le diviseur de tension :

$$\boxed{u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}.E} \quad \text{et} \quad \boxed{u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.E}$$

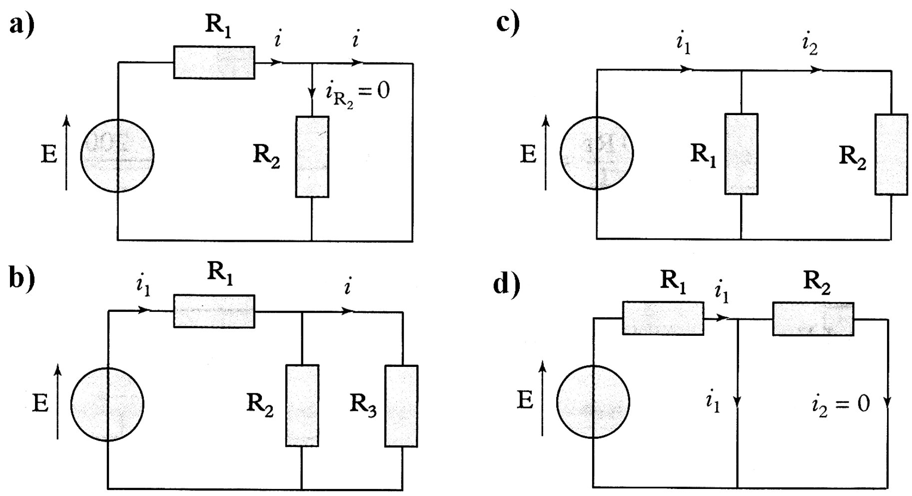
e) Comme le condensateur C_2 se comporte comme un interrupteur ouvert en régime continu, l'intensité qui le traverse est nulle, et donc la tension aux bornes de R_2 également. La tension u_2 se retrouve aux bornes de la résistance R_1. Comme l'intensité traversant C_1 est aussi nulle, la loi des nœuds conduit à un courant nul à travers R_1. On en déduit : $\boxed{u_2 = 0}$ et $\boxed{u_1 = E}$.

f) Les courants à travers les capacités étant nuls, la tension u_2 s'identifie à la tension u_1 et la loi des nœuds conduit à une intensités nulle à travers R_1. On en déduit $\boxed{u_1 = u_2 = E}$

Solution Ex-E3.3

En régime continu, le courant est constant, la tension aux bornes d'une bobine est donc nulle — puisqu'**une bobine se comporte comme un fil.**

a) R_2 est court-circuitée, la tension à ses bornes est donc nulle et tout le courant passe dans la bobine. Tout se passe comme si on avait un circuit d'une maille avec E en série avec R_1 : $\boxed{i = \dfrac{E}{R_1}}$



b) Comme la tension aux bornes de L est nulle, les résistances R_1 et R_2 sont en parallèle.

La loi de Pouillet dans la maille parcourue par i_1 constituée de E et de R_1 en série avec $R_2 \mathbin{/\!/} R_3$:

$$i = \frac{E}{R_1 + \dfrac{R_2.R_3}{R_2 + R_3}}.$$

Le diviseur de courant conduit à : $i = \dfrac{R_2}{R_2 + R_3}.i_1 \quad \rightarrow \quad \boxed{i = \dfrac{R_2.E}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}}$

c) Les deux bobines se comportent comme des fils. On a donc : $\boxed{i_1 = \dfrac{E}{R_1 \mathbin{/\!/} R_2} = \dfrac{R_1 + R_2}{R_1.R_2}.E}$

La loi d'Ohm donne : $\boxed{i_2 = \dfrac{E}{R_2}}$

d) Les deux bobines de comportant comme des fils, on a : $\boxed{i_2 = 0}$ et (loi des mailles) : $\boxed{i_1 = \dfrac{E}{R_1}}$

Solution Ex-E3.12

1.a) • L'interrupteur ouvert impose $\boxed{i_2(0^-) = 0}$.

• La loi des nœuds conduit à $i(0^-) = i_1(0^-)$.

• **Le régime continu étant établi** depuis suffisamment longtemps pour $t < 0$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. D'où : $\boxed{i(0^-) = i_1(0^-) = 0}$.

• Le condensateur ayant été chargé sous la tension continue E_1, on en déduit que $\boxed{u_C(0^-) = E_1}$. (Une simple loi des mailles donne le même résultat).

1.b) • Comme **la charge aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps**, on a

$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = E_1}$$

• La **loi des mailles** dans la première branche ($E_1 - R_1 i_1(0^+) - u_C(0^+) = 0$) conduit à :

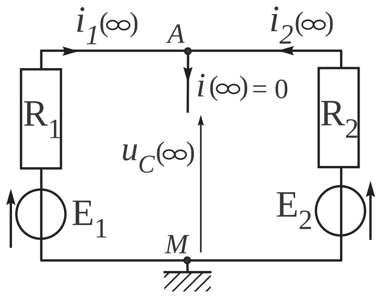
$$\boxed{i_1(0^+) = 0}$$

• La **loi des mailles** dans la seconde branche ($E_2 - R_2 i_2(0^+) - u_C(0^+) = 0$) conduit à :

$$\boxed{i_2(0^+) = \frac{E_2 - E_1}{R_2}}$$

• La **loi des nœuds** conduit à : $\boxed{i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) = \dfrac{E_2 - E_1}{R_2}}$

1.c) • Lorsque $t \to \infty$, le condensateur est à nouveau en régime permanent continu : il se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où $\boxed{i(\infty) = 0}$. On obtient le schéma équivalent ci-contre pour décrire le comportement asymptotique du circuit.



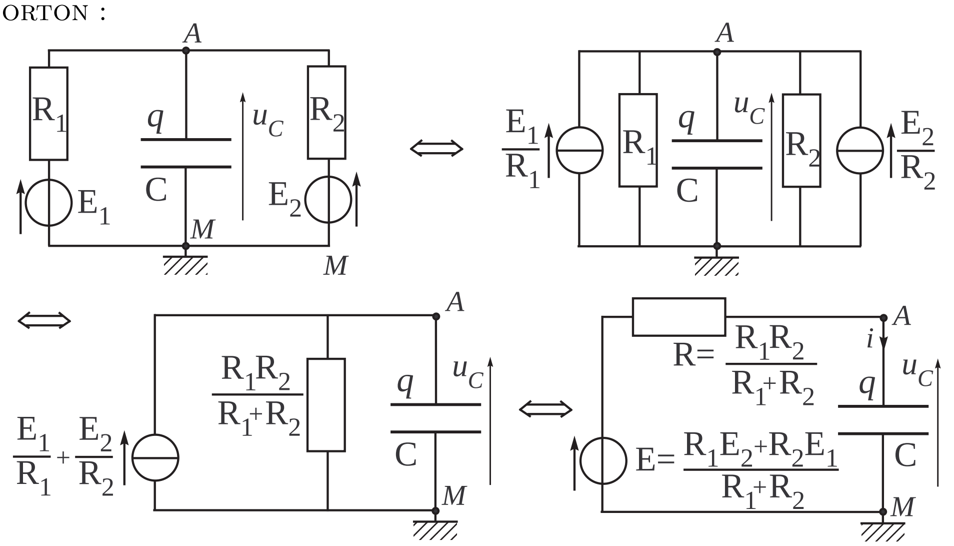
• La loi de Pouillet donne immédiatement :

$$\boxed{i_1(\infty) = -i_2(\infty) = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}}$$

• Et la loi des nœuds en termes de potentiels au point A donne :

$$\frac{V_M - V_A + E_1}{R_1} + \frac{V_M - V_A + E_2}{R_2} + 0 = 0 \quad \text{Soit :} \quad \boxed{u_C(\infty) = V_A - V_M = \frac{R_1E_2 + R_2E_1}{R_1 + R_2}}$$

2) On simplifie le circuit par une série de transformations générateur de Thévenin / générateur de Norton :



• La loi des mailles dans le circuit équivalent final donne :

$$E - Ri - u_C = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}} \ (\star)$$

en posant $\boxed{E = \dfrac{R_1E_2 + R_2E_1}{R_1 + R_2}}$ et $\boxed{R = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}}$.

• La solution de $(\star)$ est de la forme $u_C(t) = u_G(t) + u_P$, somme de la solution générale de l'équation différentielle homogène ($u_G(t)$) et d'une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre (u_P).

• Ce second étant constant, on cherche une solution u_P constante : $\boxed{u_P = E}$

• Ainsi : $\boxed{u_C(t) = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + E = A\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + u_C(\infty)}$ ①

• La constante d'intégration se trouve grâce aux conditions initiales :

$$u_C(0^+) = E_1 = A + E \ \Rightarrow \ \boxed{A = \frac{R_1(E_1 - E_2)}{R_1 + R_2} = u_C(0^+) - u_C(\infty)} \ ②$$

D'où : $\boxed{u_C(t) = \dfrac{R_1(E_1 - E_2)}{R_1 + R_2}\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) + \dfrac{R_1E_2 + R_2E_1}{R_1 + R_2}}$

3) Grâce à ① et ② : $\boxed{u_C(t) = (u_C(0^+) - u_C(\infty))\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + u_C(\infty)}$

Or, toutes les grandeurs électriques de ce circuit d'ordre 1 évoluent de la même manière, c'est-à-dire suivant la loi temporelle : $\boxed{x(t) = (x(0^+) - x(\infty))\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + x(\infty)}$

Retenir ce résultat général

Grâce à la question **1)** , on trouve :

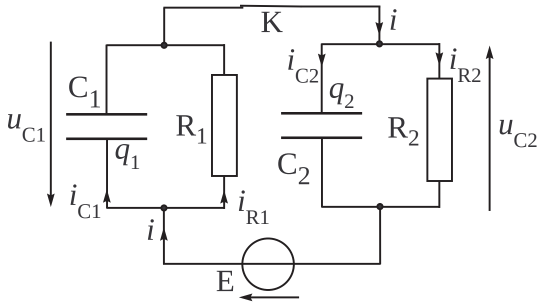
$$\boxed{i_1(t) = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)} \quad \boxed{i_2(t) = \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2} + \frac{E_2 - E_1}{R_1 + R_2}\frac{R_1}{R_2}e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad \boxed{i(t) = \frac{E_2 - E_1}{R_2}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Solution Ex-E3.13

• Loi des nœuds : $i = i_{R_1} + i_{C_1} = \frac{u_{R_1}}{R_1} + \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} \xrightarrow{u_{R_1}=u_{C_1}=\frac{q_1}{C_1}} \boxed{i = \frac{q_1}{R_1C_1} + \frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}}$ ①

• De même, comme $u_{R_2} = u_{C_2} = \frac{q_2}{C_2}$

$\longrightarrow \boxed{i = \frac{q_2}{R_2C_2} + \frac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}}$ ②



• Loi des mailles : $E - u_{C_1} - u_{C_2} = 0$

$\hookrightarrow \boxed{q_2 = C_2E - \frac{C_2}{C_1}q_1}$ ③

• ② $\xrightarrow{③}$ $i = \frac{1}{R_2C_2}\left(C_2E - \frac{C_2}{C_1}q_1\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C_2E - \frac{C_2}{C_1}q_1\right)$

$\hookrightarrow \boxed{i = \frac{E}{R_2} - \frac{q_1}{R_2C_1} - \frac{C_2}{C_1}\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t}}$ ④

• ① $\xrightarrow{④}$ $\boxed{\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C_1 + C_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)q_1 = \frac{C_1E}{R_2(C_1 + C_2)}}$

En posant $\frac{1}{\tau} \equiv \frac{1}{C_1 + C_2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Leftrightarrow \tau = \frac{1}{C_1 + C_2}\frac{R_1 + R_2}{R_2R_1}$,

et en remarquant qu'alors $\frac{1}{R_2(C_1 + C_2)} = \frac{R_1}{\tau(R_1 + R_2)}$

on obtient : $\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{q_1}{\tau} = \frac{R_1C_1}{\tau}\frac{E}{R_1 + R_2}$,

soit, avec $\tau_1 = R_1C_1$ et $I_0 = \frac{E}{R_1 + R_2}$: $\boxed{\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}t} + \frac{q_1}{\tau} = \frac{\tau_1}{\tau}I_0}$ ⑤

• La solution de cette équation différentielle est de la forme : $q(t) = q_G(t) + q_P$

- où $q_G(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ est la solution générale de l'équation homogène

- et où $q_P = \tau_1 I_0$ est une solution particulière de l'équation de second membre constant.

Ainsi : $q_1 = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + \tau_1 I_0$

• Pour déterminer la constante d'intégration A, on a besoin d'une condition initiale. Or, **comme la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps**, on a

$A + \tau_1 I_0 = q_1(0^+) = q_1(0^-) = 0$, soit $\boxed{A = -\tau_1 I_0}$ et $\boxed{q_1(t) = \tau_1 I_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$