Leçon E2 – Méthodes

■ Comment démarrer l'étude d'un circuit ?

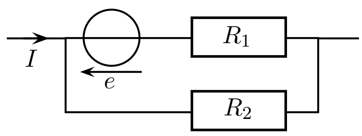
❏ **Méthode 1.—** De manière générale :
① Toujours avoir en tête **la grandeur recherchée** et en fonction de quelles autres grandeurs on cherche à l'exprimer.
② Faire apparaître **les nœuds** (et bornes utiles) et les nommer.
③ Repérer **les résistances** qui sont en série ou bien en parallèle et les remplacer par des résistances équivalentes

♦ . . . si cela ne fait pas disparaître la grandeur qui vous intéresse !

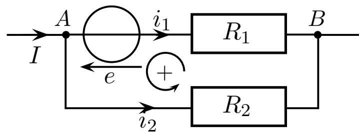
♦ **Attention !** certaines associations ne correspondent ni à des associations série, ni à des association parallèle ! (Cf. **Méth. 6-12**)

④ Imposer les **sens des courants** dans les branches et les nommer.
⑤ Placer et nommer **les tensions orientées** en respectant les conventions récepteur ou générateur pour chaque dipôle.
⑥ Appliquer **la loi des nœuds et la loi des mailles**.

Exemple : Déterminer les courants qui traversent chaque branche en fonction de R_1, R_2, e et I.



Après avoir nommer les nœuds et les intensités, on applique la loi des nœuds et la loi des mailles (penser à orienter la maille !) :



$$\begin{cases} I &= i_1 + i_2 \\ 0 &= R_1 i_1 + e - R_2 i_2 \end{cases}$$

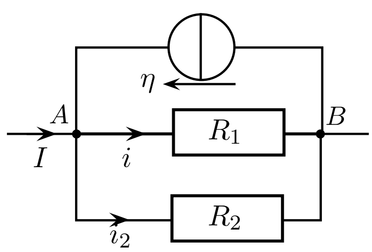
La résolution de ce système donne : $\boxed{i_1 = \dfrac{R_2 I - e}{R_1 + R_2}}$ et $\boxed{i_1 = \dfrac{R_1 I + e}{R_1 + R_2}}$

■ Procéder à des transformation Thévenin ↔ Norton

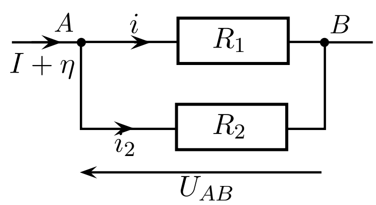
Attention ! . . . seulement si cela ne fait pas disparaître la grandeur qui vous intéresse !

❏ **Méthode 2.—** La transformation Thévenin → Norton peut être utile pour faire apparaître une association de résistances en parallèle. Penser alors :
- soit à introduire la résistance équivalente,
- soit à la possibilité d'appliquer un diviseur de courant.

Exemple : En reprenant l'exemple précédent, on reconnaît un générateur Thévenin entre A et B – qu'on peut transformer en générateur de Norton de *c.é.m.* : $\eta = \dfrac{e}{R_1}$.
Du point de vue des résistances, tout se passe comme si elles étaient alimentées en A par un courant unique d'intensité $I+\eta$.
On reconnaît un diviseur de courant : $i_2 = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}(I+\eta)$.



Soit $\boxed{i_2 = \dfrac{R_1 I + e}{R_1 + R_2}}$. De plus, $i_1 = I - i_2$, d'où : $\boxed{i_1 = \dfrac{R_2 I - e}{R_1 + R_2}}$.

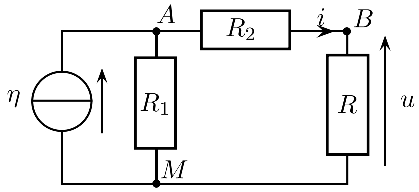


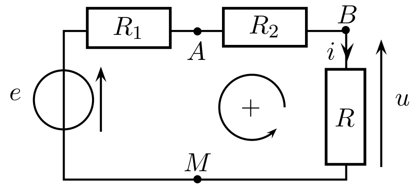
Rq1 : Noter qu'en faisant apparaître le générateur de Norton équivalent, on a fait disparaître l'intensité i_1 ! Ne surtout pas confondre i_1 qui traverse R_1 sur le schéma d'origine avec l'intensité i qui traverse R_1 sur le schéma équivalent.

Rq2 : Dans l'exemple étudié, cette méthode permet d'obtenir i_2 de manière simple, mais si l'on cherche i_2 ***et*** i_1, la première était tout autant efficace.

> ❏ **Méthode 3.—** La transformation NORTON → THÉVENIN peut être utile pour faire apparaître une association de résistances en série. Penser alors :
> - soit à introduire la résistance équivalente,
> - soit à la possibilité d'appliquer un diviseur de tension.

Exemple : Exprimer l'intensité i en fonction de R, R_1, R_2 et η.





On reconnaît un générateur NORTON entre A et M
– qu'on peut transformer en générateur de THÉVENIN de *f.é.m.* : $e = R_1\eta$.
Une simple loi des mailles dans le circuit équivalent donne :
$Ri + R_2 i + R_1 i - e = 0 \Leftrightarrow i = \dfrac{e}{R_1 + R_2 + R}$,

soit : $\boxed{i = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2 + R}\eta = \dfrac{R_1}{R_{\text{éq}}}\eta}$, avec $R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 + R$.

■ Comment déterminer une tension aux bornes d'une résistance ?

> ❏ **Méthode 4.—** La tension aux bornes d'une résistance peut s'obtenir en appliquant :
> - **la loi d'Ohm** : si on connaît R et l'intensité I qui la traverse ;
> - **la loi des mailles** : si on connaît les autres tensions de la maille considérée ;
> - **le diviseur de tension** : si on connaît les deux résistances en série et la tension aux bornes de cette association en série.

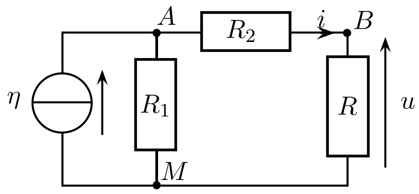
Exemple : Déterminer la tension u définie dans l'exemple précédent en fonction de R, R_1, R_2 et η.

Le diviseur de tension sur le schéma équivalent : $u = \dfrac{R}{R_1 + R_2 + R}e$, soit : $\boxed{u = \dfrac{RR_1}{R_1 + R_2 + R}\eta}$.

■ Comment déterminer l'intensité traversant une résistance ?

> ❏ **Méthode 5.—** L'intensité traversant une résistance peut s'obtenir en appliquant :
> - **la loi d'Ohm** : si on connaît R et la tension U à ses bornes ;
> - **la loi des nœuds** : si on connaît les autres intensités arrivant à ce nœud ;
> - **le diviseur de courant** : si on connaît les deux résistances en parallèle et le courant qui arrive à la borne d'entrée de cette association en parallèle.

Exemple : Exprimer *directement* l'intensité i en fonction de R, R_1, R_2 et η.



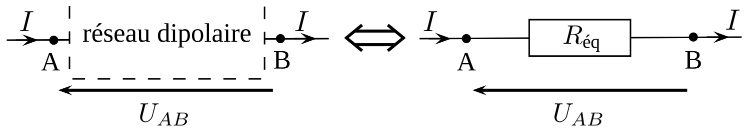
On reconnaît un diviseur de courant puisqu'une intensité η alimente deux résistances R_1 et $R' = R_2 + R$ montées en parallèle entre A et M.

On en déduit : $i = \dfrac{R_1}{R_1 + R'}\eta$, soit : $\boxed{i = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2 + R}\eta}$.

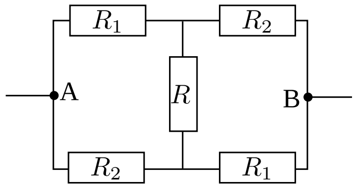
■ Comment définir la résistance équivalente d'un réseau dipolaire de résistances ?

◇ **Définition :** On appelle résistance équivalente d'un réseau dipolaire de résistances soumis à la tension U_{AB} et traversé par l'intensité I, la valeur de la résistance **unique** soumise à la même tension U_{AB} lorsqu'elle est traversée par le même courant I :

$$R_{\text{éq}} = \frac{U_{AB}}{I}$$



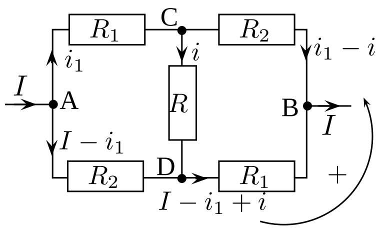
Exemple : Exprimer la résistance équivalente de ce réseau dipolaire en fonction de R, R_1 et R_2.



On applique la **Méthode 1** :
- On fait apparaître et on nomme le nœuds ainsi que l'intensité I entrante et sortante.
- Il n'y aucune association simple de résistance dans ce réseau.

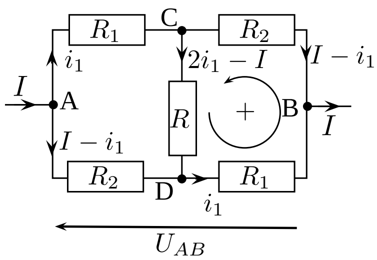
❏ **Méthode 6.—** Pour trouver $R_{\text{éq}}$, il faut donc parvenir à exprimer U_{AB} sous la forme $U_{AB} = R_{\text{éq}} I$.

- Pour ce faire, on dispose des lois de Kirchoff. En premier lieu, la loi des nœuds en A impose $I = i_{A\to C} + i_{A\to D}$.
Si on appelle $i_{A\to C} = i_1$, il vient $i_{A\to D} = I - i_1$.
- Si on pose $i_{C\to D} = i$, on peut alors compléter le schéma en faisant apparaître les intensités dans les autres branches, de manière à ce que la loi des nœuds soit respectée en C, D, et donc B.
- On peut ensuite chercher une relation entre les inconnues i_1 et i en appliquant la loi des mailles pour la maille extérieure $(ADBCA)$:



$$-R_2(I - i_1) - R_1(I + i - i_1) + R_2(i_1 - i) + R_1 i_1 = 0$$

Soit $i = 2i_1 - I$. Ce qui permet de de simplifier le schéma.
- La loi des mailles pour $(DBCD)$ donne :



$$R_2(I - i_1) - R(2i_1 - I) - R_1 i = 0$$

Soit : $i_1 = \dfrac{R_2 + R}{R_1 + R_2 + 2R} I$.

- L'additivité des tensions donne : $U_{AB} = U_{AD} + U_{DB} = R_2(I - i_1) + R_1 i_1$

Conclusion : $U_{AB} = R_{\text{éq}} I$, avec $\boxed{R_{\text{éq}} = \dfrac{R(R_1 + R_2) + 2R_1R_2}{R_1 + R_2 + 2R}}$

Compléments

■ Comment exploiter un plan de symétrie des courants ?

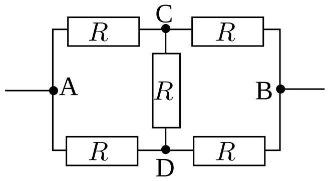
Position du problème : Soit un réseau dipolaire constitué seulement de résistances entre deux points A et B. On souhaite calculer la résistance équivalente du réseau entre ces deux points.

> ❑ **Méthode 7.—** Dans le cas de la recherche de la résistance équivalente d'un réseau dipolaire entre les nœuds A et B, toujours faire apparaître l'intensité I entrante et sortante.

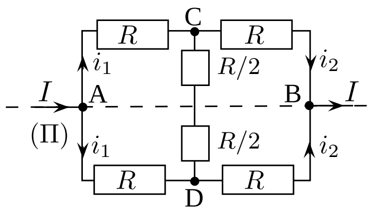
Lorsque les associations de résistances sont trop ramifiées pour une simplification directe (par association de résistances en série ou en parallèle), le calcul reste possible si le réseau comporte un fort degré de symétrie. Tout repose alors sur le concept de plan de symétrie (et d'antisymétrie) des courants du réseau étudié entre les points A et B.

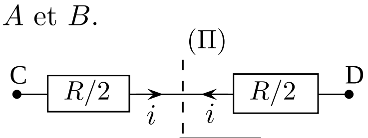
> ◇ **Définition :** Un réseau présente **un plan de symétrie des courants** (Π) lorsque :
> - il est géométriquement invariant par cette symétrie
> - en deux points symétriques par rapport à (Π), les courants sont représentés par deux flèches symétriques l'une de l'autre par rapport à ce plan.

> ❑ **Méthode 8.—** La recherche de plans de symétrie (ou d'antisymétrie) peut amener à « couper »une résistance R en deux résistances $R/2$ placées en série.



Exemple : Donner la résistance équivalente au dipôle ci-contre. Pour ce faire, on commence par faire apparaître l'intensité entrante et sortante pour ce réseau dipolaire.
La résistance R entre les nœuds C et D pouvant être scindée en deux, il apparaît un plan de symétrie des courants (Π) passant par A et B.





Dans la branche (CD), le courant i qui la parcourt doit être son propre symétrique.

On en déduit $\boxed{i = 0}$. Soit, puisque $U_{CD} = Ri = 0$, $\boxed{V_C = V_D}$.

> **▌Propriété :** Deux points symétriques par rapport à un plan de symétrie des courants (Π) du réseau ont même potentiel électrique.

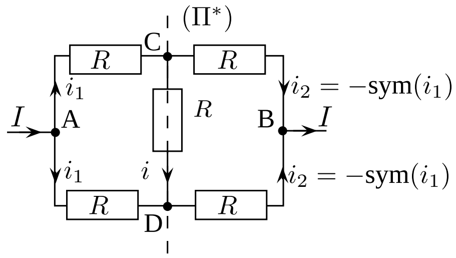
> ❑ **Méthode 9.—** Dès lors que deux points d'un circuit sont symétriques par rapport à un plan de symétrie des courants, puisqu'ils ont même potentiel électrique, deux simplifications sont envisageables :
> - si ces points étaient sans lien direct, on peut les relier par un simple fil sur un schéma équivalent
> - s'il s'agit des deux nœuds d'une branche, cette branche étant traversée par une intensité nulle, on peut la supprimer du circuit sans modifier les propriétés de ce dernier.

Exemple : Pour le circuit de l'exemple précédent, C et D sont au même potentiel :
- si on fait disparaître la branche (CD), il apparaît entre A et B, deux branches en parallèle contenant chacune une résistance $2R$. Donc : $\boxed{R_{\text{éq}} = 2R//2R = R}$.
- si on court-circuite la branche (CD) en reliant C et D par un fil, il apparaît deux résistances

R et R en parallèle entre A et C en série avec deux résistances R et R en parallèle entre C et B. On a donc : $\boxed{R_{\text{éq}} = \frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R}$.

■ Comment exploiter un plan d'anti-symétrie des courants ?

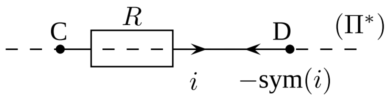
> ◇ **Définition :** Un réseau présente **un plan d'anti-symétrie des courants** (Π^*) lorsque :
> - il est géométriquement invariant par cette symétrie
> - en deux points symétriques par rapport à (Π^*), les courants sont représentés par deux flèches anti-symétriques, l'une étant l'opposé du symétrique de l'autre par rapport à ce plan.



Exemple : Donner la résistance équivalente du dipôle de l'exemple précédent en mettant en évidence un plan d'anti-symétrie.

Pour ce faire, on remarque que le plan (Π^*) passant par la branche (CD) :
- est plan de symétrie géométrique du réseau (en particulier A et B sont symétriques par rapport à ce plan)
- transforme l'intensité I entrante en A en son courant anti-symétrique au niveau de B.

→ ***Conclusion*** : (Π^*) est plan d'anti-symétrie des courants du réseau dipolaire entre A et B



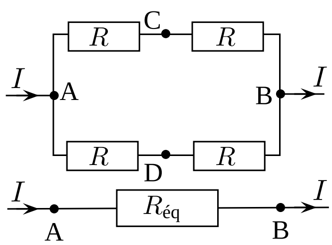
De plus, comme la branche (CD) est dans le plan (Π^*), le courant i qui la parcourt doit être égal à son propre anti-symétrique par rapport à (Π^*).

On en déduit $\boxed{i = 0}$. Soit, puisque $U_{CD} = Ri = 0$, $\boxed{V_C = V_D}$.

> ▮ **Propriété :** Deux points appartenant à un plan d'anti-symétrie du réseau (Π^*) ont même potentiel électrique.

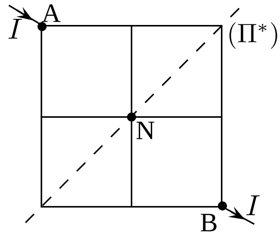
> ❑ **Méthode 10.—** Dès lors que deux points d'un circuit appartiennent à un plan d'anti-symétrie des courants, puisqu'ils ont même potentiel électrique, deux simplifications sont envisageables :
> - si ces points étaient sans lien direct, on peut les relier par un simple fil sur un schéma équivalent
> - s'il s'agit des deux nœuds d'une branche, cette branche étant traversée par une intensité nulle, on peut la supprimer du circuit sans modifier les propriétés de ce dernier.

Exemple : Pour le circuit de l'exemple précédent, C et D sont au même potentiel : on peut donc faire disparaître la branche (CD).
Il apparaît entre A et B, deux branches en parallèle.
Chacune contient une résistance $2R$.
On retrouve $\boxed{R_{\text{éq}} = 2R // 2R = R}$.



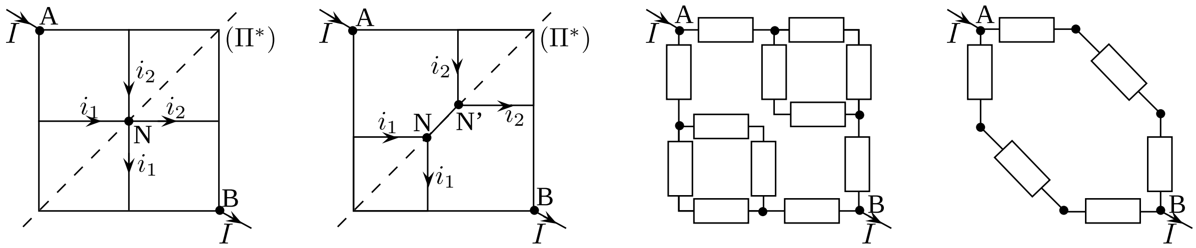
> ❏ **Méthode 11.—** Dans certains cas, lorsqu'un ***nœud*** N du réseau appartient à un plan d'anti-symétrie des courants :
> - il est judicieux de le « dilater »le long de ce plan (Π^*) selon un fil NN'.
> - Puisque ce fil n'est parcouru par aucun courant (**Méth.10**), on peut le supprimer sur un schéma équivalent.

Exemple : Sur le circuit ci-contre, utilisé entre la borne A et la borne B, chaque segment représente une résistance R. Donner sa résistance équivalente.

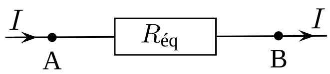


Sur le circuit ci-contre, le sens des intensités entrante et sortante montre que (Π^*) est un plan d'anti-symétrie des courants passant par le nœud N.

Il est donc possible de scinder le circuit conformément aux schémas suivants :



Il apparaît deux branches contenant chacune une résistance $R' = R + (2R//2R) + R = 3R$. Soit $\boxed{R_{\text{éq}} = R'//R' = \frac{3}{2}R}$.



■ Généralisation

> ❏ **Méthode 12.—** Pour simplifier un réseau dipolaire constitué seulement de résistance et le remplacer, entre ses bornes d'entrée et de sortie, par une unique résistance sur un schéma équivalent :
> ① Chercher les plans de symétrie (Π) du réseau.
> ② Attribuer à deux points symétriques par rapport à un plan (Π) le même potentiel.
> ③ Chercher les plans d'antisymétrie (Π^*) du réseau.
> ④ Attribuer à deux points appartenant à un plan (Π^*) le même potentiel.
> ⑤ Redessiner le réseau en reliant (lorsque c'est utile) les points de même potentiel électrique par un fil.
> ♦ Vérifier qu'aucune branche initiale n'a été oubliée sur la nouvelle figure.
> ♦ Faire disparaître les résistance qui sont court-circuitées dans ce processus (puisqu'elles ne sont parcourues par aucun courant)
> ⑥ Calculer la résistance équivalente par les règle d'association série/parallèle.