■ Régime forcé sinusoïdal

Ex-E4/5.1 Circuit RLC Série

1) Considérons le circuit dipolaire RLC série du cours alimenté par une tension sinusoïdale ($e(t) = E_0 \cos(\omega t)$). → Établir que l'équation différentielle qui régit la tension aux bornes de la capacité C est :

$$LC\,\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\,\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E_0\cos(\omega t)$$

→ Donner l'expression intrinsèque de cette équation différentielle en fonction de Q, facteur de qualité et de la pulsation propre ω_0.
→ Donner l'expression intrinsèque de cette équation différentielle en fonction de α, cœfficient d'amortissement et de la pulsation propre ω_0.

2) Établir que $u_C(t) = E_0\left[\sin(\omega_0 t) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\exp\left(-\frac{1}{2}\,\omega_0 t\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\omega_0 t\right)\right]$ lorsque le circuit vérifie les quatre conditions suivantes :
(1) le condensateur est initialement déchargé ; **(2)** l'intensité est nulle avant la fermeture de l'interrupteur ; **(3)** la pulsation du générateur est $\omega = \omega_0$ et **(4)** le cœfficient d'amortissement vaut $\alpha = \frac{1}{2}$.

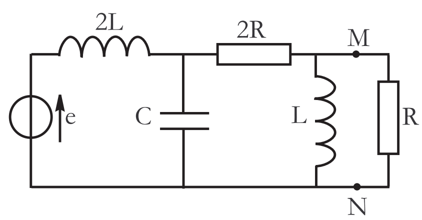
Ex-E4.2 Addition de deux signaux de même fréquence

Supposons deux signaux sinusoïdaux $S_1(t) = S_0\cos(\omega t)$ et $S_2(t) = S_0\sin(\omega t)$.
→ En utilisant les représentations complexes, calculer la somme $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$.
→ Préciser l'amplitude et la phase à l'origine de ce signal.
→ Tracer les fonctions $S_1(t)$, $S_2(t)$ et $S(t)$; vérifier le résultat précédent.
→ Si ces deux signaux sont deux tensions telles que $S_1(t)$ soit la tension aux bornes d'une résistance R et $S_2(t)$ la tension aux bornes d'un second dipôle, en déduire la nature de ce second dipôle.

Ex-E4.3 Réseau à trois mailles

On considère le réseau à trois mailles indépendantes, représenté ci-contre, alimenté par la source de tension alternative de *f.é.m.* : $e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$.
La fréquence du générateur est réglée de manière à avoir :

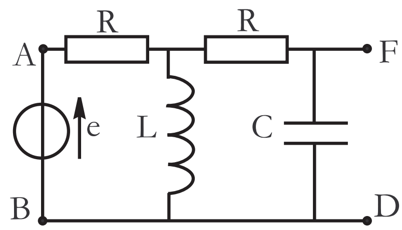
$$L\omega = \frac{1}{C\omega} = R.$$



Déterminer toutes les caractéristiques de l'intensité du courant dans la résistance R.
A. N. : $E = 20\ V$; $R = 10\ \Omega$.
Rép : $i(t) = 0,686\cos(\omega t - 1,82)\ A$, où $1,82\ rad = 104°$.

Ex-E4.4 Modélisation de Thévenin

On considère le circuit suivant alimenté entre A et B par une source de tension alternative sinusoïdale de *f.é.m.* : $e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$.
Déterminer les caractéristiques du générateur de tension (modèle de Thévenin) équivalent entre F et D sachant que ω est telle que : $LC\omega^2 = 1$ et $RC\omega = 1$

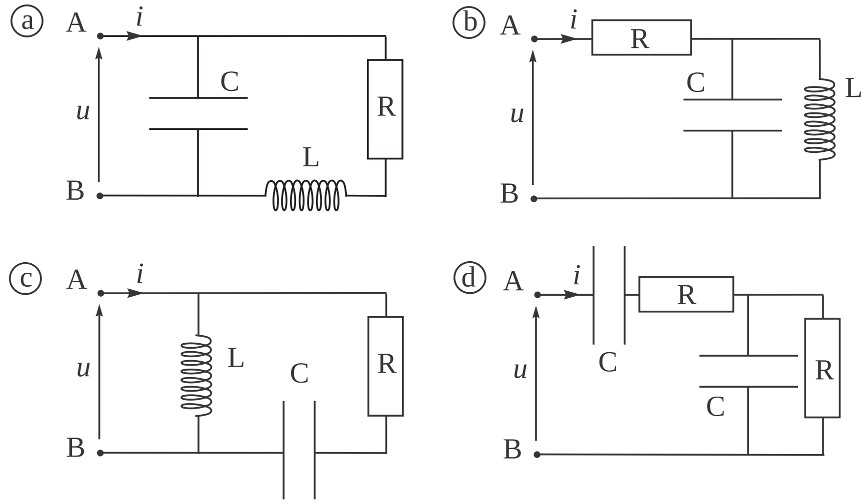


Rép :
$\underline{E}_{Th} = \frac{2-j}{5}\underline{E} \Rightarrow e_{Th}(t) = E\sqrt{\frac{2}{5}}\cos(\omega t - 0,464)\ A$, où $-0,464\ rad = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) = \arg(2-j)$.
Cette *f.é.m.* est en série avec $\underline{Z}_{\text{éq}} = R_{\text{éq}} + \frac{1}{jC_{\text{éq}}\omega}$ ⇒ soit une résistance $R_{\text{éq}} = \frac{3R}{5}$ en série avec

une capacité $C_{\text{éq}} = \dfrac{5C}{4}$.

Ex-E4.5 Calculs d'impédances

Déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du réseau dipolaire entre les bornes A et B dans les quatre cas suivants.
En déduire à chaque fois l'impédance réelle Z ainsi que le déphasage de la tension u par rapport au courant i.



Ex-E4.6 Circuit RLC parallèle en régime sinusoïdal

Exprimer la tension $\underline{u}$ aux bornes d'un réseau dipolaire constitué d'une résistance en parallèle avec une bobine en parallèle avec un condensateur en fonction de R, L, C, w et de $\underline{i} \equiv I_0 \exp(j\omega t)$ (intensité fournie au dipôle).

Vérifier que l'étude de la résonance en tension u de ce cirduit RLC **parallèle** lorsqu'on applique un courant i sinusoïdal est identique à celle de la résonance en courant dans le circuit RLC **série**.

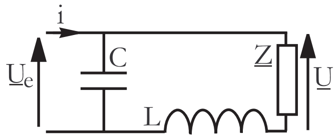
Exprimer alors ω_0, la pulsation propre, Q', le facteur de qualité du circuit RLC parallèle ainsi que $\alpha' \equiv \dfrac{1}{2Q'}$, son cœfficient d'amortissement.

Rép : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q' = RC\omega_0$.

Ex-E4.7

1) Exprimer $\underline{U}$ en fonction de $\underline{I}$, $\underline{Z}$, L, C et ω, pulsation du régime sinusoïdal imposé à ce circuit.

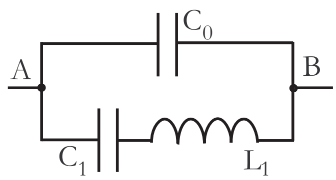
2) À quelle condition sur L, C et ω, $\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}}$ et le déphasage entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$ ne dépendent-ils pas de $\underline{Z}$?



Rép : 2) $LC\omega^2 = 1$.

Ex-E4.8

On alimente le dipôle AB avec une tension sinusoïdale de pulsation ω. → Déterminer l'impédance complexe de AB. Tracer $|\underline{Z}| = Z(\omega)$, puis montrer que cette courbe présente deux singularités pour les pulsations ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$).



Rép : $\underline{Z} = \dfrac{1 - L_1C_1\omega^2}{j[(C_0 + C_1)\omega - L_1C_1C_0\omega^3]}$.

Ex-E4.9 Modélisation d'un condensateur réel

On considère un diélectrique imparfait (isolant imparfait) de permittivité complexe $\epsilon = \epsilon_0.(x' - jx'')$ avec x' et x'' deux réels. C'est l'isolant d'un condensateur de capacité $C = \dfrac{\epsilon}{\epsilon_0}C_0$.

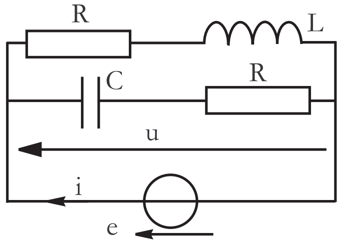
Ce condensateur est soumis à une tension sinusoïdale $u(t) = U_m.cos(\omega t)$.

→ Exprimer l'impédance complexe du condensateur.

→ En déduire qu'on peut le considérer comme l'association d'un condensateur parfait de capacité C et d'une résistance R qu'on exprimera.

Rép : R et C en parallèle, avec : $R = \dfrac{1}{x''C_0\omega}$ et $C = C_0 x'$.

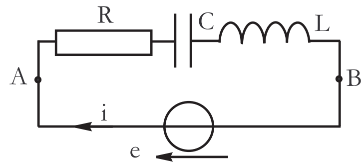
Ex-E4.10



Sachant que $e = E_m.cos(\omega t)$, trouver la condition pour que $\underline{i}$ et $\underline{u}$ soient en phase quelle que soit ω.

Rép : $R = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$, alors $\dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = R$.

Ex-E4.11 Puissance électrique (1) On donne : $R = 10\ \Omega$, $L = 100\ \mu H$, $C = 200\ \mu F$, $\omega = 5.10^6\ rad.s^{-1}$, $E_{\text{eff}} = 5\ V$.

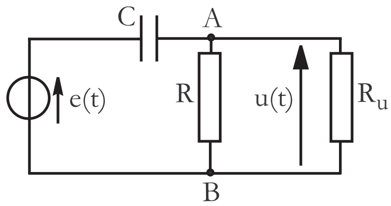


Déterminer et calculer : l'impédance complexe du dipôle AB, le facteur de puissance et la puissance moyenne dissipée.

Rép : $\cos\varphi = 0,02$ et $<\mathcal{P}>= 1\ mW$ car :

$$\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\ ;\ \cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}\ ;\ <\mathcal{P}>= \frac{R.E_{\text{eff}}^2}{R^2 + \left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}$$

Ex-E4.12 Réponse harmonique d'un dipôle

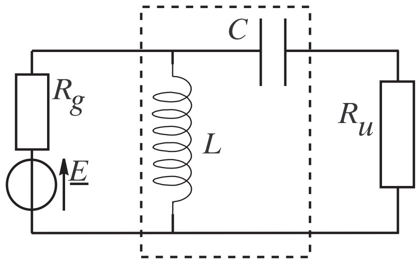


Déterminer la réponse harmonique $u(t)$ du dipôle AB ($R_u//R$) lorsqu'il est soumis à l'excitation sinusoïdale $e(t) = E_m.\cos(\omega t)$.

Rép : $u(t) = U_m\cos(\omega t + \varphi_u)$ avec, en posant $\omega_0 = \dfrac{1}{RC}$:

$U_m = \dfrac{E_m\omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}}$ et $\varphi = \arctan\dfrac{\omega_0}{\omega}$.

Ex-E4.13 Adaptation d'impédance (1)



Pour transmettre une puissance maximale du générateur $(\underline{E}, R_g)$ à l'impédance de charge (d'utilisateur) $R_u \neq R_g$, on intercale entre le générateur et l'utilisateur un quadipôle réalisé avec une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C.

→ Montrer que le quadripôle permet l'adaptation d'impédance souhaitée lorsque $R_u < R_g$.

Calculer L et C en fonction de R_u, R_g et ω pulsation du générateur, afin de réaliser un transfert maximal d'énergie.

Solution Ex-E4.13

• Le générateur est branché sur un dipôle constitué d'une bobine en parallèle avec un condensateur en série avec une résistance. Appelons $\underline{Z}$ son impédance équivalente ($\underline{Z} = jL\omega//(R_u + \dfrac{1}{jC\omega})$).

La puissance moyenne reçue par un condensateur ou une bobine est nulle ($<\mathcal{P}_C>=<\mathcal{P}_L>= 0$; ➜ Cf Cours **E4.V.1** et **E4.VI**). Le quadripôle intercalé entre le générateur et le récepteur R_u étant constitué de tels dipôles réactifs, la puissance fournie par le générateur est transmise sans pertes à l'utilisateur (R_u).

Donc « chercher la condition de transfert maximal d'énergie entre le générateur et R_u » revient à chercher la condition de transfert maximal d'énergie entre le générateur et le dipôle d'impédance $\underline{Z}$.

Or pour que le générateur fournisse une puissance maximale, il faut qu'il soit branché sur une impédance $\underline{Z}$ telle que : $\underline{Z} = \underline{Z_g}^* = R_g$ (**condition d'adaptation d'impédance** ; ➜ Cf **E5.V.4**)

• Exprimons $\underline{Z}$: $\underline{Z} = jL\omega // \left(R_u + \dfrac{1}{jC\omega}\right) = \dfrac{jL\omega\left(R_u + \dfrac{1}{jC\omega}\right)}{R_u + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$

D'où, regroupant termes réels et imaginaires : $\left(R_gR_u - \dfrac{L}{C}\right) + j\omega\left[L\left(R_g - R_u\right) - \dfrac{R_g}{C\omega^2}\right] = 0$

L'égalité à zéro entraîne : $\dfrac{L}{C} = R_gR_u$ et $LC = \dfrac{R_g}{\omega^2\left(R_g - R_u\right)} > 0 \Rightarrow \boxed{R_g > R_u}$

On en déduit : $\boxed{L = \dfrac{R_g}{\omega}\sqrt{\dfrac{R_u}{R_g - R_u}}}$ et $\boxed{C = \dfrac{1}{\omega\sqrt{R_u\left(R_g - R_u\right)}}}$

Ex-E4.14 Adaptation d'impédance (2)

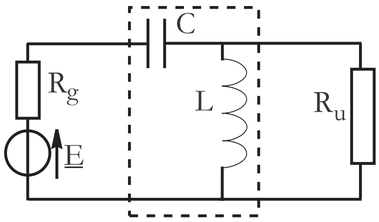
Une installation électrique est alimentée sous une tension efficace $U_{\text{eff}} = 220\ V$. Elle consomme une puissance $\mathcal{P} = 12\ kW$. La fréquence vaut $f = 50\ Hz$ et l'intensité efficace $I_{\text{eff}} = 80\ A$.

1) Sachant que cette installation est du type *inductif*, calculer la résistance R et l'inductance propre L qui, placées en série et avec la même alimentation, seraient équivalentes à l'installation.

2) Calculer le facteur de puissance de cette installation. Calculer la capacité C à placer en parallèle sur l'installation pour relever le facteur de puissance à la valeur $0,9$.

Rép : **1)** Établir que $R = \dfrac{<\mathcal{P}>}{I_{\text{eff}}^2} \simeq 1,9\ \Omega$; $L = \dfrac{1}{\omega}\sqrt{\dfrac{U_{\text{eff}}^2}{I_{\text{eff}}^2} - \dfrac{<\mathcal{P}>}{I_{\text{eff}}^4}} \simeq 6,4\ mH$; **2)** Astuce : $\cos\varphi$ peut s'obtenir en exprimant l'admittance $\underline{Y}$ associée à $\underline{Z}$ car $\cos\varphi = \dfrac{\mathcal{R}e(\underline{Y})}{|\underline{Y}|}$ (➜ Cf Cours **E5.V.1**). On trouve $C = \dfrac{R}{\omega(R^2 + L^2\omega^2)}\left[\pm\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\varphi} - 1} + \dfrac{L\omega}{R}\right]$, d'où 2 valeurs possibles pour $\cos\varphi = 0,9$: $C_{\text{max}} \simeq 1,23\ mF$ et $C_{\text{min}} \simeq 0,46\ mF$.

Ex-E4.15 Adaptation d'impédance (3)



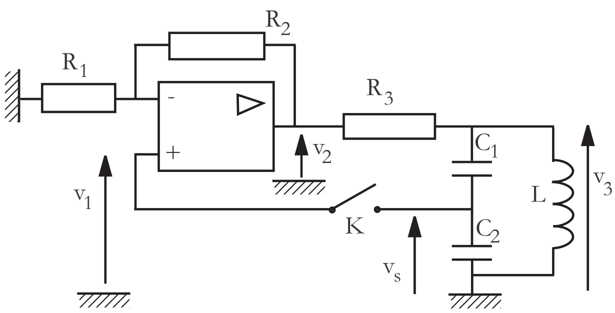
Pour transmettre une puissance maximale du générateur $(\underline{E}, R_g)$ à l'impédance de charge (d'utilisateur) $R_u \neq R_g$, on intercale entre le générateur et l'utilisateur un quadipôle réalisé avec une bobine d'inductance L et un condensateur de capacité C.

→ Montrer que le quadripôle permet l'adaptation d'impédance souhaitée lorsque $R_u > R_g$.

Calculer L et C en fonction de R_u, R_g et ω pulsation du générateur, afin de réaliser un transfert maximal d'énergie.

Rép : $L = \dfrac{R_u}{\omega}\sqrt{\dfrac{R_g}{R_u - R_g}}$ et $C = \dfrac{1}{\omega R_g}\sqrt{\dfrac{R_g}{R_u - R_g}}$.

Ex-E4.16 Oscillateur avec A.O.



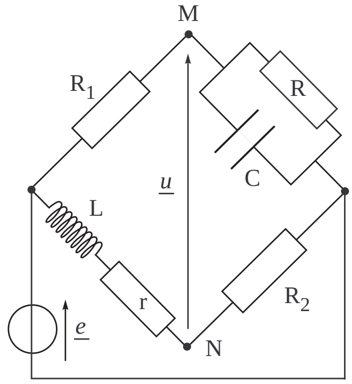
L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire.

1) K est ouvert. Exprimer (en supposant que les tensions existent et sont sinusoïdales) :

$$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} \quad ; \quad \frac{\underline{V}_3}{\underline{V}_2} \quad ; \quad \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_3}$$

2) K est fermé. Déterminer les conditions pour que le montage soit un oscillateur de pulsation ω. Exprimer ω.

Ex-E4.17 Équilibre d'un pont en régime sinusoïdal

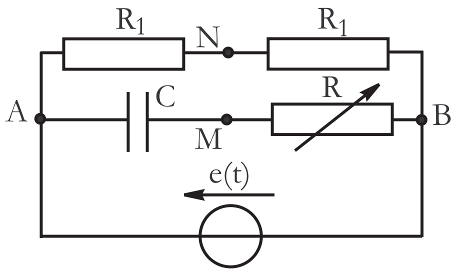


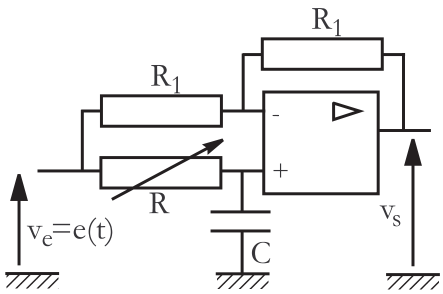
Le pont ci-contre est alimenté en régime alternatif.
À quelle condition le pont est-il équilibré ? c'est–dire à quelle condition $u = 0$?
Montrer que l'on peut déterminer L et r en fonction de C et des résistances R_1, R_2 et R.

Rép : $u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r & = & \dfrac{R_1 R_2}{R} \\ L & = & R_1 R_2 C \end{cases}$

Ex-E4.18 Deux montages déphaseurs

On considère les deux montages suivants alimentés par une tension alternative sinusoïdale $e(t) = E\sqrt{2}\cos(\omega t)$. L'amplificateur opérationnel est idéal.





1) Dans le premier montage (avec pont), montrer que la tension entre M et N : $v = V\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ a une valeur efficace indépendante de ω.
Calculer le déphasage φ et donner ses variations en fonction de R.

2) Dans le second montage (avec AO), calculer la tension de sortie v_s.
En déduire la valeur efficace de cette tension et le déphasage φ par rapport à v_e.

3) Quel rôle jouent ces deux montages ?

Rép : 1) $v = u_{NM} = U_{NM}\cos(\omega t + \varphi)$ avec $\underline{U}_{NM} = \dfrac{1 - jRC\omega}{2(1 + jRC\omega)}\underline{E}$ soit : $V = \dfrac{E}{2}$ et $\varphi = -2\arctan(RC\omega)$. **2)** $\underline{V}_s = \dfrac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}\underline{V}_e$ soit : $V = E$ et $\varphi = -2\arctan(RC\omega)$