

■ E3 ■ Régimes transitoires

I Définitions

I.1 Régime libre, régime transitoire et régime continu

◇ **Définition** : On appelle

- **réponse libre** ou **régime libre** d'un circuit, l'évolution de celui-ci en l'absence de tout générateur.
- Le régime du circuit est dit **continu** (ou **stationnaire**) lorsque toutes les grandeurs électriques du circuit (intensités, tensions) sont des constantes (du temps).
- Entre le moment où toutes les sources sont éteintes et celui où le régime continu est établi, on a un **régime transitoire**.
- Le réseau étant linéaire, l'évolution de toute grandeur électrique (intensité, tension, charge d'un condensateur...) est décrite par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

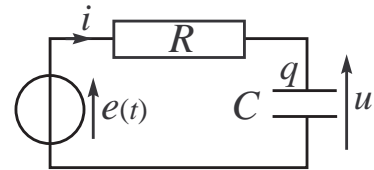
$$D_n \frac{d^n x}{dt^n} + D_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + D_1 \frac{dx}{dt} + D_0 x = f(t)$$

où l'ordre n de l'équation différentielle définit **l'ordre du circuit**.

Nous étudierons les circuits d'ordre 1 et d'ordre 2.

Ex : Circuit du 1^{er} ordre régi par l'équation :

$$RC \frac{du}{dt} + u = e(t)$$



On montre, en mathématiques, que la solution générale d'une telle équation se met toujours sous la forme :

$$u(t) = \underbrace{u_G}_{\text{régime libre (transitoire)}} + \underbrace{u_P}_{\text{régime forcé imposé par la source}}$$

• Où :

- u_G est la solution générale de l'équation homogène (*i.e.* équation sans second membre) : elle correspond au régime libre du circuit (absence de source de tension ou de courant).

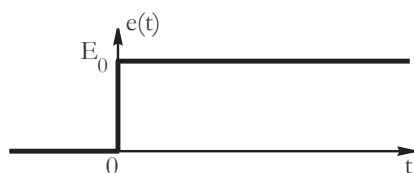
- u_P est une solution particulière de l'équation avec second membre : elle correspond au régime forcé imposé par la source.

• Tant que $|u_G(t)| \sim |u_P|$, on est dans le domaine du régime transitoire.

Lorsque $|u_G| \ll |u_P|$, le régime forcé est établi (ici, régime continu).

I.2 Échelon de tension

Un générateur délivre un échelon de tension lorsque la tension à ses bornes a la forme suivante :



$$\begin{cases} \text{pour } t < 0 : e(t) = 0 \\ \text{pour } t > 0 : e(t) = E_0 \end{cases}$$

Une telle tension provoque dans un circuit l'apparition d'un régime transitoire puis d'un régime permanent continu. Cette évolution du circuit porte le nom de **réponse à un échelon de tension** ou **réponse indicelle**.

II Circuit RL série

II.1 Étude théorique de l'évolution du courant :

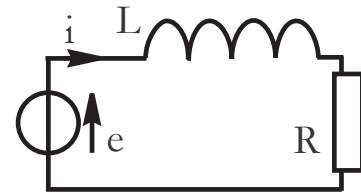
Nous allons étudier la réponse indicielle d'un circuit RL série, puis son régime libre.

a Montage :

Dans le circuit ci-contre, la loi des mailles s'écrit :

$$-e + Ri + L \frac{di}{dt} = 0. \text{ Soit : } \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{e(t)}{L}} \quad (E)$$

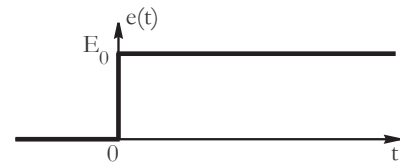
C'est une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants et avec 2nd membre.



◇ **Définition :** L'homogénéité de la relation impose $\tau = \frac{L}{R}$ homogène à un temps : c'est le **temps caractéristique / constante de temps** du circuit RL.

b Établissement du courant :

- $e(t)$ est un échelon de tension, soit $\begin{cases} t < 0 : e(t) = 0 \\ t \geq 0 : e(t) = E_0 \end{cases}$



À $t \geq 0$, l'équation différentielle s'écrit : $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_0}{L}$ (1)

→ La solution de (1) s'écrit : $i = i_G + i_P$.

Rappel : $\frac{dx}{dt} + kx = 0 \Rightarrow x_G = Ae^{-kt}$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Ici : $\boxed{i_G = Ae^{-\frac{R}{L}t} = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$ et $i_P = cte$ (puisque le second membre de (1) est constant)

Donc i_P doit vérifier $\frac{di_P}{dt} + \frac{R}{L}i_P = \frac{E_0}{L}$, d'où $\boxed{i_P = \frac{E_0}{R}}$. Finalement : $\boxed{i = \frac{E_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}}$.

- Pour déterminer la constante d'intégration A , **on a besoin d'une condition initiale (C.I.)**, c'est-à-dire la valeur de l'intensité i à une date donnée $t \geq 0$.

On note la date « Juste avant $t = 0$ » comme suit : $t = 0^-$.

On note la date « Juste après $t = 0$ » comme suit : $t = 0^+$.

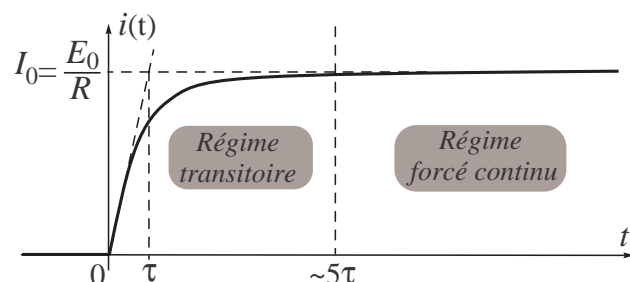
On suppose, par exemple, qu'en $t = 0^-$ il n'y a aucun courant dans le circuit. La condition initiale s'écrit donc : $i(0^-) = i_0 = 0$.

- Or, on sait que *le courant traversant une bobine est une fonction continue du temps* (→ Cf Cours) → D'où : $i(0^+) = i(0^-) = i_0 = 0$, par continuité de l'intensité i .

On a donc : $i(0^+) = \begin{cases} i(0^-) = i_0 = 0 \\ i(t=0^+) = \frac{E_0}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = -\frac{E_0}{R}}$.

Conclusion : $\boxed{i = \frac{E_0}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})}$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, $i \rightarrow \frac{E_0}{R} = I_0$:
le régime transitoire s'efface et laisse place au régime permanent continu.



- Par suite : $\frac{di}{dt} = \frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$, soit $\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0} = \frac{E_0}{L}$

Donc, l'équation de la tangente à la courbe en $O(0,0)$ est : $y = \frac{E_0}{L}t$.

On a $y = I_0 = \frac{E_0}{R}$ pour $t = \frac{L}{E_0} \frac{E_0}{R} = \frac{L}{R} = \tau$.

Propriété : On se rend compte que $\tau = \frac{L}{R}$ donne un *ordre de grandeur de la durée du régime transitoire*.

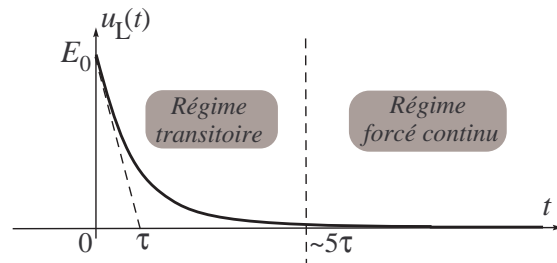
Ordre de grandeur : $\begin{cases} L \simeq 10^{-3} \text{ H} \\ R \simeq 10^3 \text{ } \Omega \end{cases} \Rightarrow \tau \simeq 10^{-6} \text{ s}$... c'est très faible : le régime transitoire «s'éteint» rapidement.

- Représentation de u_L tension aux bornes de la bobine : $u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{E_0}{L} e^{-\frac{R}{L}t}$,

soit : $u_L = E_0 e^{-\frac{R}{L}t} = E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

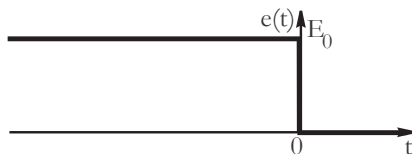
Pendant le régime transitoire, la bobine cherche à 'contrer' la tension du générateur en imposant une tension de sens opposé (loi de LENZ).

En régime établi (régime permanent continu), $u_L = 0$. On retrouve qu'en régime continu la bobine se comporte comme un fil conducteur.



c Extinction de la source (étude du régime libre) :

•



Pour simplifier les calculs, on réinitialise le temps :

$$\begin{cases} \text{pour } t < 0 : & e(t) = E_0 \\ \text{pour } t \geq 0 : & e(t) = 0 \end{cases}$$

- Le montage se ramène alors à \rightarrow

La loi des mailles s'écrit, pour $t \geq 0$: $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$ (E).

C'est une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants et sans 2nd membre.



- La solution s'écrit : $i = B e^{-\frac{R}{L}t}$ avec $B \in \mathbb{R}$.

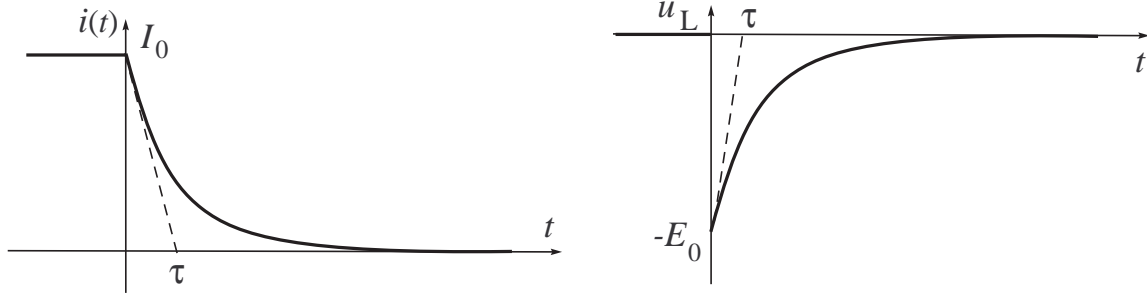
De plus, par continuité de l'intensité traversant la bobine, on a :

$$i(0^+) = \begin{cases} i(0^-) = I_0 = \frac{E_0}{R} \\ i(t=0^+) = B \end{cases} \Rightarrow \text{d'où : } \boxed{B = \frac{E_0}{R}}. \text{ Finalement : } \boxed{i(t) = \frac{E_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t}}.$$

Cl : donc la tension aux bornes de la bobine est : $u_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{E_0}{R} \left(-\frac{R}{L} e^{-\frac{R}{L}t}\right)$,

soit : $u_L = -E_0 e^{-\frac{R}{L}t}$.

On se rend compte que le **régime libre** est un **régime transitoire** de durée de l'ordre du temps caractéristique du circuit RL série $\tau = \frac{L}{R}$: au bout de « quelques » τ , $i \rightarrow 0$ et $u_L \rightarrow 0$.



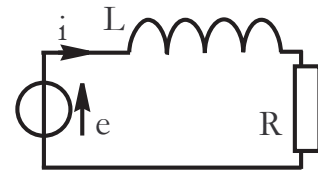
II.2 Étude énergétique

a Puissance instantanée reçue par la bobine :

La puissance fournie par le générateur au reste du circuit vaut :

$$\mathcal{P}_{fournie} = e \cdot i$$

(On suppose la source de tension idéale, donc sans résistance interne.)



D'après la loi des mailles : $e = Ri + L \frac{di}{dt}$, d'où :

$$\mathcal{P}_{fournie} = \underbrace{Ri^2}_{\text{puissance dissipée par effet JOULE dans R}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)}_{\mathcal{P}_L \text{ puissance reçue par la bobine}}$$

b Établissement du courant :

• on définit $t_0 \gg \tau$; ainsi, à la date t_0 , on est en **régime continu**, soit : $i(t_0) = I$.

• **Calcul de l'énergie emmagasinée \mathcal{E}_L par la bobine entre $t = 0$ et t_0 :**

On a, par définition : $\mathcal{P}_L = \frac{d\mathcal{E}_L}{dt}$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_L = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_L dt = \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) dt = \left| \frac{1}{2} Li^2 \right|_0^{t_0} = \frac{1}{2} L \cdot i(t_0)^2 - 0 = \frac{1}{2} LI^2 \Rightarrow \mathcal{E}_L = \frac{1}{2} LI^2$$

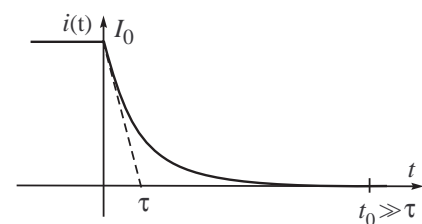
■ **Propriété** : Cette énergie est stockée dans la bobine *tant qu'on est en régime permanent continu*.

c Extinction de la source :

• on réinitialise le temps : ainsi, la date $t = 0$ correspond à l'extinction de la source, soit : $i(t = 0^-) = I$.

Cette fois, à $t = t_0$, l'intensité est nulle.

• **Calcul de l'énergie \mathcal{E}_R dissipée dans R par effet Joule entre $t = 0$ et t_0 :**



À tout instant t , on a la relation : $\mathcal{P}_J = Ri^2 = \frac{d\mathcal{E}_R}{dt}$.

$$\text{Par suite : } \mathcal{E}_R = |\mathcal{E}_R(t)|_0^{t_0} = \int_0^{t_0} \frac{d\mathcal{E}_R(t)}{dt} dt = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_{\text{Joule}} dt = \int_0^{t_0} Ri^2 dt$$

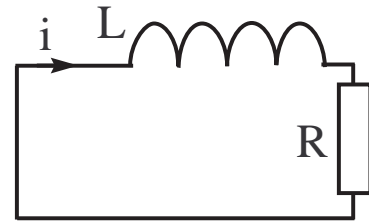
Or le circuit est équivalent au circuit ci-contre.

$$\text{Donc : } Ri = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow Ri^2 = -Li \cdot \frac{di}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

Finalement :

$$\mathcal{E}_R = \int_0^{t_0} -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) dt = \left| -\frac{1}{2} Li^2 \right|_0^{t_0} = 0 - \left(-\frac{1}{2} Li^2 \right)$$

$$\text{CI : } \boxed{\mathcal{E}_R = \frac{1}{2} LI^2 = \mathcal{E}_L}$$

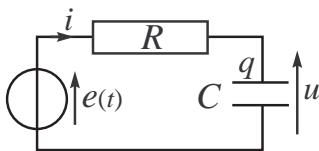


■ propriété : Toute l'énergie stockée dans la bobine idéale est **intégralement** restituée et a été (ici) dissipée par effet JOULE.

III Circuit RC série

III.1 Étude théorique de la charge et de la décharge d'un condensateur

a Montage :



La loi des mailles s'écrit : $-e + Ri + \frac{q}{C} = 0$, avec $i = \frac{dq}{dt}$.

Les deux équations se combinent pour donner :

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{e}{R}}$$

C'est une équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre à coefficients constants et avec 2nd membre.

◇ **Définition :** L'homogénéité de la relation impose $\tau = RC$ homogène à un temps : c'est le **temps caractéristique / constante de temps** du circuit RC série.

b Mise en fonction de la source :

• Il y a charge du condensateur sous la tension $e(t)$ telle que :

$$\begin{cases} \text{pour } t < 0 : e(t) = 0 \\ \text{pour } t \geq 0 : e(t) = E_0 \end{cases}$$

• Pour $t \geq 0$, l'équation différentielle s'écrit :

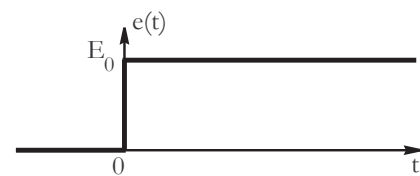
$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = \frac{E_0}{R} \quad (1)$$

• La solution de (1) est : $q = q_G + q_P$ (sol. générale de l'éq. sans 2nd membre + sol. particulière de l'éq. avec second membre).

$$\begin{cases} \rightarrow \text{avec : } q_G = \lambda e^{-\frac{t}{RC}} = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) & \Rightarrow \text{Soit : } q(t) = \lambda e^{-\frac{t}{RC}} + CE_0 \\ q_P = CE_0 \end{cases}$$

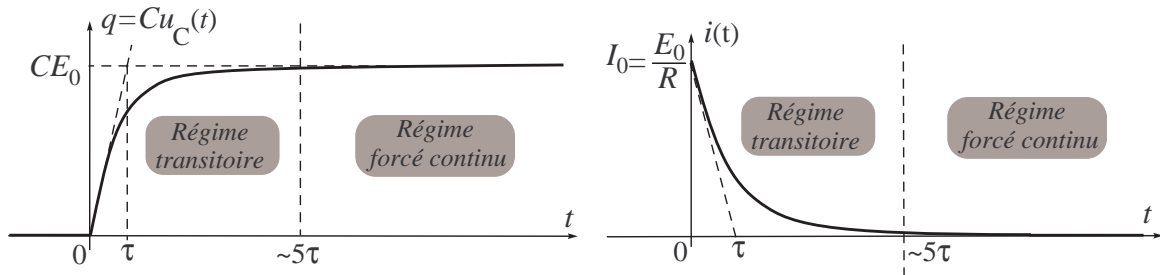
• Pour déterminer λ , on suppose (par exemple) que pour $t < 0$, le condensateur n'est pas chargé ($q(t = 0^-) = q_0 = 0$).

• De plus, la **continuité de la charge aux armatures du condensateur** (\rightarrow Cf Cours) impose : $q(t = 0^+) = q(t = 0^-)$.



- Donc : $q(0^+) = \begin{cases} q(0^-) = 0 \\ q(t=0^+) = \lambda + CE_0 \end{cases} \Rightarrow$ soit : $\lambda = -CE_0$.

Ainsi : $q(t) = CE_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$ et $i(t) = \frac{dq}{dt} = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ avec $I_0 = \frac{E_0}{R}$



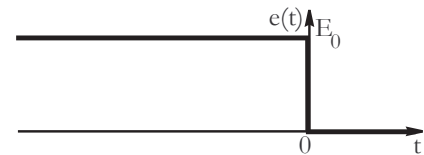
■ **Propriété** : On remarque que le **régime continu** est atteint lorsque le condensateur a atteint sa charge maximale sous la tension E_0 ; alors, le courant ne circule plus.
 → En régime continu, le condensateur se comporte comme un *interrupteur ouvert*.

c Extinction de la source :

On réinitialise le temps pour simplifier les calculs :

- Il y a décharge du condensateur lorsque on éteint $e(t)$:

$$\begin{cases} \text{pour } t < 0 : e(t) = E_0 \\ \text{pour } t \geq 0 : e(t) = 0 \end{cases}$$



Pour $t \geq 0$, l'équation différentielle s'écrit :

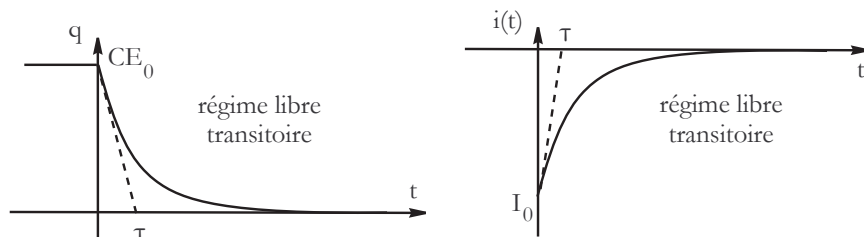
$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{RC}q = 0 \quad (2) \text{ de solution : } q = \mu e^{-\frac{t}{RC}} = \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \text{ avec } \mu \in \mathbb{R}$$

- Détermination de μ :

- Pour $t < 0$, $q = CE_0$ (car on suppose le condensateur complètement chargé sous la tension E_0).
 - Par continuité de la charge, nous obtenons : $q(t=0^+) = q(t=0^-)$,

soit : $q(t=0^+) = \begin{cases} q(0^-) = CE_0 \\ q(t=0^+) = \mu \end{cases} \Rightarrow$ d'où : $\mu = CE_0$.

Ainsi : $q(t) = CE_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ et $i(t) = \frac{dq}{dt} = -I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$ en posant : $I_0 = \frac{E_0}{R}$.



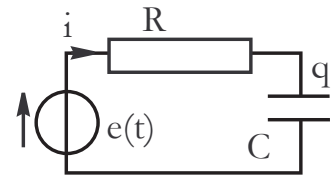
Rq : $i < 0$ car la décharge se fait dans le sens opposé au sens *positif conventionnel* du schéma.

III.2 Étude énergétique

La puissance fournie au circuit par le générateur, de résistance interne négligeable, vaut :

$$\mathcal{P}_f(t) = e(t)i(t) = \left(Ri + \frac{q}{C}\right) i$$

avec $i = \frac{dq}{dt}$, il vient : $qi = q \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}q^2\right)$.



$$\rightarrow \text{d'où : } \mathcal{P}_f = \underbrace{Ri^2}_{\text{dissipée par effet JOULE ds R}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}\right)}_{\text{emmagasinée dans C à la date t}}$$

a Charge du condensateur :

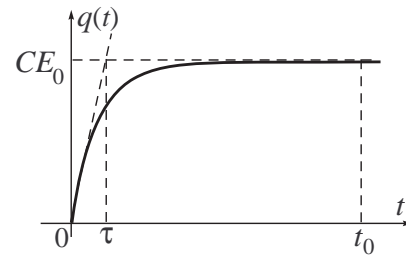
• On calcule l'énergie *emmagasinée* par le condensateur entre $t = 0$ et $t = t_0$ avec $t_0 \gg \tau$.

Par définition, l'énergie emmagasinée \mathcal{E}_C entre $t = 0$ et t_0 est la *variation d'énergie électrostatique* $\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ du condensateur :

$$\mathcal{E}_C = \Delta_{0 \rightarrow t_0} \mathcal{E}_C(t) = \mathcal{E}_C(t_0) - \mathcal{E}_C(0) = \frac{1}{2} C E_0^2 - 0,$$

ou encore :

$$\mathcal{E}_C = \Delta_{0 \rightarrow t_0} \mathcal{E}_C(t) = \int_0^{t_0} d\mathcal{E}_C(t) = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_{\text{reçue par C}} dt$$



$$\text{Donc : } \mathcal{E}_C = \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}\right) dt = \int_0^{t_0} d \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}\right) = \left. \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right|_0^{t_0}, \text{ soit : } \boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C E_0^2}$$

■ **Propriété** : Cette énergie \mathcal{E}_C est **emmagasinée** par le condensateur : elle n'est pas dissipée (perdue), mais **stockée** tant que le régime est **continu**.

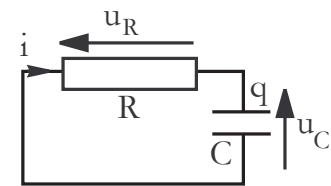
b Décharge du condensateur :

• Pour simplifier le problème, on réinitialise le temps au début de la décharge ($t = 0$ est désormais l'instant où on éteint la source qui auparavant avait chargé le condensateur à sa charge maximale CE_0).

• La loi des mailles donne $u_R + u_C = 0$, soit : $u_R = -u_C = -\frac{q}{C}$.

La puissance reçue par la résistance R pendant la décharge vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{reçue par R}}(t) = u_R i = -\frac{q}{C} i = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}\right).$$



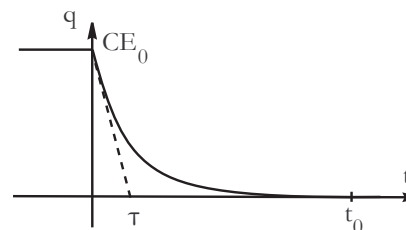
Cette puissance reçue est intégralement dissipée par effet JOULE.

• L'énergie dissipée par effet JOULE entre les instants $t = 0$ et t_0 - c'est-à-dire du début à la fin de la décharge, est donc l'énergie reçue par la résistance, \mathcal{E}_R , entre $t = 0$ et t_0 avec :

$$\mathcal{P}_J = \mathcal{P}_{\text{reçue par R}} = \frac{d\mathcal{E}_R}{dt};$$

$$\text{d'où : } \mathcal{E}_R = \int_0^{t_0} \mathcal{P}_J dt = \int_0^{t_0} -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C}\right) dt = \left. -\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \right|_0^{t_0}$$

$$\text{Finalement : } \boxed{\mathcal{E}_R = \frac{1}{2} C E_0^2 = \mathcal{E}_C}$$



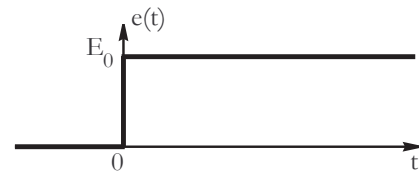
■ **Propriété** : Lors de la décharge du condensateur, toute l'énergie stockée est dissipée dans la résistance par effet JOULE.

Application : cette énergie peut actionner le flash d'un appareil photo ou un moteur par ex.

IV Circuit RLC série

IV.2 Réponse indicielle d'un circuit RLC Série (réponse à un échelon de tension)

- dans tout ce paragraphe, on suppose le condensateur initialement déchargé : $q(t = 0^-) = q(t = 0^+) = q_0 = 0$.
 - On ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$.
- la tension $u(t)$ aux bornes du circuit (RLC) série est un échelon de tension.

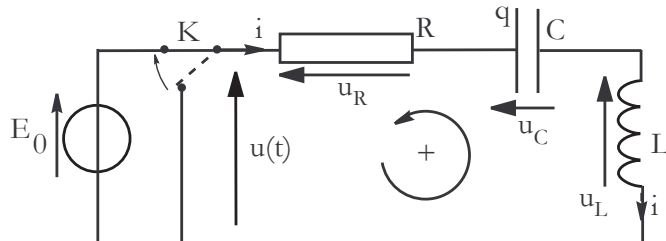


- $\forall t$, on applique la loi des mailles :
 $-u(t) + Ri + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0$; avec $i = \frac{dq}{dt}$, soit :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = u(t)$$

→ Ainsi :

$$\left[\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = \frac{u(t)}{L} \right] \Leftrightarrow \left[\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{u(t)}{L} \right] \quad (E)$$



Le circuit est régi par une équation différentielle du 2^{nd} ordre à coefficients constants avec 2^{nd} membre.

- Pour $t \geq 0$, on peut écrire : $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E_0}{L}$ (E).

→ Solution générale de (E) : $q(t) = q_G(t) + q_P(t)$, avec :

- $q_G \equiv$ **solution générale de l'équation sans 2^{nd} membre** ; elle correspond au régime *libre* du circuit (RLC) qui est *transitoire* → Cf. IV.1 ;
- $q_P \equiv$ **solution particulière de l'équation avec 2^{nd} membre** ; ce second membre traduit la présence d'une source qui impose un régime *forcé* au circuit (RLC) ; si la *f.é.m.* est continue, ce régime forcé est *permanent continu*.

- On cherche q_P sous la forme d'une fonction constante puisque le 2^{nd} membre est constant ; (E) devient :

$$0 + 0 + \omega_0^2 q_P = \frac{E_0}{L} \quad \Leftrightarrow \quad q_P = \frac{E_0}{\omega_0^2 L} = CE_0 \quad \text{Soit : } \boxed{q_P = CE_0}$$

- **Trois cas se présentent pour la solution q_G** : ils correspondent aux trois régimes libres transitoires possibles :

α) Régime libre aperiodique ; β) Régime libre critique et γ) régime libre pseudo-périodique

- **Exemple : cas γ)** le régime libre transitoire est pseudo-périodique : $\Delta < 0$ et $Q > \frac{1}{2}$.

Les racines de l'équation caractéristique de l'équation sans 2^{nd} membre sont des *racines complexes conjuguées*, qu'on peut écrire sous la forme $r_{1/2} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega$ - et donc :

$$\boxed{q_G(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \quad \text{avec : } \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \text{ et } \omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

→ Alors, la solution générale de (E) s'écrit :

$$\begin{aligned} q(t) &= q_P + q_G(t) = CE_0 + (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \rightarrow i(t) &= \left[\left(B\omega - \frac{A}{\tau} \right) \cos \omega t - \left(A\omega - \frac{B}{\tau} \right) \sin \omega t \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \end{aligned}$$

Dans les expressions précédentes, A et B sont deux constantes d'intégration fixées par les Conditions Initiales; choisissons le cas initial suivant : $\{q(0^-) = q_0 = 0 ; i(0^-) = i_0 = 0\}$.
Dès lors :

- la conservation de la charge aux bornes du condensateur se traduit par :

$$q(0^+) = \begin{cases} q(0^-) = q_0 = 0 \\ q(t=0^+) = CE_0 + A \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = -CE_0}$$

- la conservation de l'intensité traversant la bobine se traduit par :

$$i(0^+) = \begin{cases} i(0^-) = i_0 = 0 \\ i(t=0^+) = -\frac{A}{\tau} + B\omega \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = \frac{A}{\tau\omega} = \frac{CE_0}{\tau\omega}}$$

Finalement :
$$q(t) = CE_0 \left[1 - \left(\cos \omega t + \frac{1}{\tau\omega} \sin \omega t \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right] \quad (*) \quad \text{Cf. Doc 10 et 12.}$$

Rq1 : On peut remarquer que : $\tau\omega = \sqrt{4Q^2 - 1}$.

Rq2 : Cf. Doc 9 et 11 pour les cas α) et β).

L'expression finale de $q(t)$ permet de retrouver celle de l'intensité dans le circuit :

$$i = \frac{dq}{dt} = -CE_0 \left[\left(-\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau} \right) \cos \omega t + \left(-\omega - \frac{1}{\tau^2\omega} \right) \sin \omega t \right] \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right)$$

Soit :
$$i(t) = CE_0 \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \left(\omega + \frac{1}{\tau^2\omega} \right) \sin \omega t \quad (**)$$

Rq3 : Cf. Doc 14 où l'évolution de $i(t)$ est donnée par $u_R(t)$ (et Doc 13 pour le cas α)).

• Commentaires :

(1)

On peut prévoir, avant de faire les calculs, les valeurs des grandeurs, une fois le régime transitoire passé, car le régime est alors continu.

- En régime **continu**, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert

→ D'où : $i = 0$ et donc $u_R = Ri = 0$ V pour $t \gg \tau$.

- En régime **continu**, la bobine se comporte comme un fil, donc la tension à ses bornes est nulle :

$u_L = 0$ V et on a : $E_0 = u_R + u_C + u_L = u_C = \frac{q}{C}$ → Soit : $q = CE_0$ pour $t \gg \tau$.

CI : Ceci correspond bien au comportement asymptotique de (*) et (**)!
Toujours penser à vérifier ce comportement par cette méthode simple.

(2)

On déduit de la remarque précédente que $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2L}{R}$ est bien l'ordre de grandeur de la **durée du régime transitoire**.

IV.3 Étude énergétique

a En régime libre :

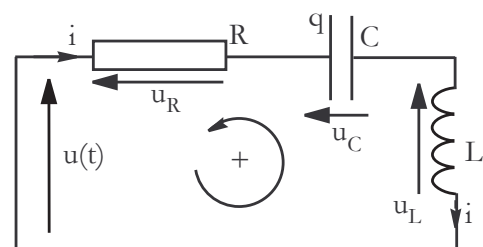
• $\forall t$, on applique la loi des mailles :

$$u_R + u_C + u_L = 0 \Leftrightarrow Ri + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0$$

avec $i = \frac{dq}{dt}$.

En multipliant l'équation par i :

$$Ri^2 + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = 0$$



Soit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 \right) = -Ri^2$$

On a vu que :

- $\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$ est l'énergie électrostatique emmagasinée par le condensateur à l'instant t ;

- et $\mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2} Li^2$ est l'énergie emmagasinée par la bobine à l'instant t ;

→ Donc $\mathcal{E}(t) \equiv \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t)$ est l'énergie emmagasinée dans le condensateur et la bobine à l'instant t .

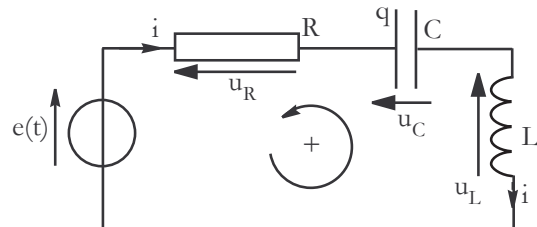
Conclusion : Lors du régime libre, l'énergie emmagasinée $\mathcal{E}(t)$ diminue au cours du temps : elle est dissipée par effet JOULE dans la résistance R .

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} = -Ri^2 < 0$$

b Circuit RLC série branché sur un générateur :

- Loi des mailles : $-e + Ri + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0$.

En multipliant chaque membre de cette équation par l'intensité i , il apparaît la puissance fournie par le générateur (supposé idéal) au reste du circuit :



$$\mathcal{P}_f = ei = Ri^2 + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt}$$

Soit :

$$\mathcal{P}_f = Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 \right) = \mathcal{P}_J + \frac{d}{dt} (\mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t)) = \mathcal{P}_J + \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt}$$

• Remarque : Nous n'avons pas supposé que la *f.é.m.* était continue ; a priori elle peut être variable. Mais bien sûr, en régime permanent continu ($e(t) = E_0$), la relation précédente est vérifiée : - au bout de quelques τ , $i = 0$, c'est-à-dire :

- $\mathcal{P}_J = 0$ et de même $\mathcal{P}_f = 0$,

- et comme $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} CE_0^2$, on a également : $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0$.

IV.4 Retour sur le facteur de qualité Q et le régime pseudo-périodique

a Facteur de qualité Q :

- $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ → ainsi : $Q \searrow$ lorsque $R \nearrow$.

- En régime *libre*, nous avons vu que : $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -Ri^2 = -\frac{L\omega_0}{Q} \cdot i^2$

→ Il apparaît que pour des expériences de durées Δt identiques, la perte d'énergie emmagasinée du circuit $|\Delta\mathcal{E}| \nearrow$ lorsque $R \nearrow$, c'est-à-dire lorsque $Q \searrow$.

→ Donc :

- plus R est grand et plus le circuit est *amorti*, plus il perd rapidement son énergie ;
- plus Q est grand et moins le circuit perd rapidement son énergie.

■ Q , facteur de qualité du circuit (RLC) est un nombre sans dimension qui permet d'évaluer la capacité du circuit à conserver l'énergie qu'il a emmagasinée.

b Pertes relatives d'énergie pour un RLC série en régime libre pseudo-périodique sur une pseudo-période :

- $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2.$

- Perte d'énergie sur une pseudo-période : $|\Delta\mathcal{E}| = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T).$

Perte d'énergie *relative* sur une pseudo-période : $\frac{|\Delta\mathcal{E}|}{\mathcal{E}}.$

- À chaque instant t , on a : $i(t+T) = i(t) \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$ et $q(t+T) = q(t) \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$
→ d'où :

$$\mathcal{E}(t+T) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t+T)}{C} + \frac{1}{2} Li^2(t+T) = \left[\frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} + \frac{1}{2} i^2(t) \right] \exp -\frac{2T}{\tau} = \mathcal{E}(t) \exp\left(-\frac{2T}{\tau}\right)$$

→ d'où :

$$\frac{|\Delta\mathcal{E}|}{\mathcal{E}(t)} = \frac{\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)}{\mathcal{E}(t)} = 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}}$$

Rappel de maths : $|x| \ll 1 \rightarrow e^x \simeq 1 + x.$

Dans le cas des « grands » facteurs de qualité¹, on a $T \equiv \frac{2\pi}{\omega} = T_0 \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \simeq T_0,$

ce qui permet d'écrire : $\frac{2T}{\tau} \simeq \frac{2T_0}{\frac{2Q}{\omega_0}} = \frac{\omega_0 T_0}{Q} = \frac{2\pi}{Q}.$

Donc, pour $Q \gg 2\pi$: $e^{-\frac{2T}{\tau}} \simeq e^{-\frac{2\pi}{Q}} \simeq 1 - \frac{2\pi}{Q} \rightarrow$ D'où : $\frac{|\Delta\mathcal{E}|}{\mathcal{E}} \simeq \frac{2\pi}{Q}$

1. il suffit d'avoir $Q > 4$ comme on l'a vu en **IV.1.a.γ**), Remarque(4).