Kh-EME.5 **Détermination d'une distribution volumique de charges**

1) Trouver la distribution de charges $\rho(r)$ ($r = OM$) donnant lieu au potentiel $V(r) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0.r}.\exp(-\alpha.r)$, où r est la distance de M à l'origine O fixe, q une charge donnée et α une constante positive.

2) En déduire l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$.

Formulaire : Laplacien en coordonnées sphériques pour une distribution à symétrie sphérique :

$$\Delta\varphi(r) = \frac{1}{r^2}.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right]$$

Solution

1) $V(r)$ connue permet d'exprimer $\rho(r)$ grâce à l'équation de Poisson : $\Delta V = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}$

Soit, en coordonnées sphériques :

$$\frac{1}{r^2}.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right] = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Il faut d'abord exprimer

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0.r^2}.(1+\alpha.r).\exp(-\alpha.r)$$

On en tire

$$r^2.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}.(1+\alpha.r).\exp(-\alpha.r) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}.\alpha^2.r.\exp(-\alpha.r)$$

On a donc : $\rho = -\epsilon_0.\Delta V = -\epsilon_0.\dfrac{1}{r^2}.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2.\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = -\dfrac{q.\alpha^2}{4\pi.r}\exp(-\alpha.r)}$

2) Comme $\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V = -\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}.\overrightarrow{e_r}$, on a : $\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0.r^2}.(1+\alpha.r).\exp(-\alpha.r).\overrightarrow{e_r}}$