Kh-EME.1 Soit un milieu chargé de la densité volumique de charge uniforme ρ compris entre les plans $x = -\dfrac{a}{2}$ et $x = \dfrac{a}{2}$.

1) Déterminer les symétries et les invariances du champ électrique.

2) Déterminer le champ $\overrightarrow{E}$ en tout point M de l'espace en appliquant le théorème de Gauss.

3) Retrouver ce résultat en appliquant la relation de Maxwell-Gauss (relation locale de Gauss).

4) Déterminer le potentiel électrostatique V correspondant.

5) Déterminer la charge surfacique uniforme σ du plan $(\pi_0) = (Oyz)$ équivalent à la distribution précédente lorsque $a \to 0$.

6) Vérifier alors la relation de passage.

Solution

1)

• **Symétries de sources :** $(\pi_1) = (Mxz)$ et $(\pi_1) = (Mxy)$ sont des plans de symétrie des sources passant par M. Le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ appartenant à tout plan de sysmétrie des sources passant par M, on conclut que $\overrightarrow{E}(M) \in (\pi_1) \cap (\pi_2) = (Mx)$. Donc :

$$\overrightarrow{E}(M) = E_x.\overrightarrow{e_x} + E_y.\overrightarrow{e_y} + E_z.\overrightarrow{e_z} = E(M).\overrightarrow{e_x} \quad (\star)$$

• **Invariances des sources :** Les invariances des sources déterminent les invariances du champ. Les sources étant invariantes pour toute translation selon Oy ou selon Oy, on conclut que

$$\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{E}(x, y, z) = \overrightarrow{E}(x) \quad (\star\star)$$

CI : $\xrightarrow[(\star\star)]{(\star)} \boxed{\forall M \in \mathcal{E} \quad \overrightarrow{E}(M) = E(x).\overrightarrow{e_x}}$

• Remarquons que $(\pi_0) = (Oyz)$ est plan de symétrie de la distribution de charges. On doit donc avoir

$$\forall M \in (\pi_0) \quad \overrightarrow{E}(M) = E(0).\overrightarrow{e_x} \in (Oxy) \;\Rightarrow\; \boxed{E(0) = 0}$$

2)

• Choix de la surface de Gauss : cylindre d'axe Mx, de section S entrée en M, de longueur x entre le plan (π_0) et le plan d'abscisse x.

• Théorème de Gauss :

$$\oint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{E}(M) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

• Trois cas :

$$\begin{array}{llllll}
ⓐ & \dfrac{a}{2} < x & : & E(x).S = S.\dfrac{a}{2}.\dfrac{\rho}{\epsilon_0} & \Rightarrow & \boxed{\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}.\dfrac{a}{2}.\overrightarrow{e_x}} \\
ⓑ & \dfrac{a}{2} < x < \dfrac{a}{2} & : & E(x).S = S.x.\dfrac{\rho}{\epsilon_0} & \Rightarrow & \boxed{\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}.x.\overrightarrow{e_x}} \\
ⓒ & x < -\dfrac{a}{2} & : & -E(x).S = S.\dfrac{a}{2}.\dfrac{\rho}{\epsilon_0} & \Rightarrow & \boxed{\overrightarrow{E}(M) = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}.\dfrac{a}{2}.\overrightarrow{e_x}}
\end{array}$$

3)

• La relation de Maxwell-Gauss est : $\boxed{\text{div}\,\overrightarrow{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}}$

Soit, en coordonnées cartésiennes :

$$\text{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}} + \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial z}} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

• Trois cas :

ⓐ $\frac{a}{2} < x$: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow E(M) = K$

ⓑ $\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E(M) = \frac{\rho}{\epsilon_0}.x + K' \xrightarrow{E(0)=0} K' = 0$ et $\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{\rho}{\epsilon_0}.x.\overrightarrow{e_x}}$

ⓒ $x < -\frac{a}{2}$: $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow E(M) = K''$

• Comme le champ électrostatique est continu (pour une distribution *volumique* de charges), on a :

$$E\left(x = \frac{a}{2}^+\right) = E\left(x = \frac{a}{2}^-\right) \Rightarrow K = \frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{a}{2}.\overrightarrow{e_x}} \text{ pour } x > \frac{a}{2} \quad ⓐ$$

$$E\left(x = -\frac{a}{2}^-\right) = E\left(x = -\frac{a}{2}^+\right) \Rightarrow K'' = \frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{E}(M) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{a}{2}.\overrightarrow{e_x}} \text{ pour } x < -\frac{a}{2} \quad ⓒ$$

4) Par définition du potentiel V :

$$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V = -\frac{\partial V}{\partial x}.\overrightarrow{e_x} - \cancel{\frac{\partial V}{\partial y}}.\overrightarrow{e_y} - \cancel{\frac{\partial V}{\partial z}}.\overrightarrow{e_z} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}.\overrightarrow{e_x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -E(x)$$

On a donc

ⓐ $\frac{a}{2} < x$: $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{a}{2} \Rightarrow V(M) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{a}{2}.x + C$

ⓑ $\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2}$: $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.x \Rightarrow V(M) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{x^2}{2} + C'$

ⓒ $x < -\frac{a}{2}$: $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = +\frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{a}{2} \Rightarrow V(M) = \frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{a}{2}.x + C''$

$$\xrightarrow[\text{(choix)}]{V(0)=0} \begin{cases} C' = 0 \\ \boxed{V(M) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{x^2}{2}} \end{cases}$$

Comme le potentiel est continu, on a :

$$V\left(x = \frac{a}{2}^+\right) = V\left(x = \frac{a}{2}^-\right) \Rightarrow -\frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{a}{2}.\left(\frac{a}{2}\right) + C = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{a^2}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(M) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{a}{2}.\left(x - \frac{a}{4}\right)} \text{ pour } x > \frac{a}{2} \quad ⓐ$$

$$V\left(x = -\frac{a}{2}^-\right) = V\left(x = -\frac{a}{2}^+\right) \Rightarrow \frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{a}{2}.\left(-\frac{a}{2}\right) + C'' = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{a^2}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(M) = \frac{\rho}{\epsilon_0}.\frac{a}{2}.\left(x + \frac{a}{4}\right)} \text{ pour } x < -\frac{a}{2} \quad ⓒ$$

5) Si les distributions sont équivalentes, à une section S doit correspondre la même charge :

$$Q = S.a.\rho = S.\sigma \Leftrightarrow \boxed{\sigma = a.\rho}$$

6) Pour le plan infini, le champ électrostatique est :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(x < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}.\overrightarrow{e_x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{E}(x > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.\overrightarrow{e_x}}$$

Soit : $\overrightarrow{E}(0^+) - \overrightarrow{E}(0^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.\overrightarrow{e_x}$

On vérifie bien la relation de passage : $\boxed{\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.\overrightarrow{n}_{1\to 2}}$