Ex-S2.1 **Équations différentielles (1)**

1) L'évolution d'une fonction $x(t)$ de la variable t est régie par une équation différentielle d'ordre 2 sans second membre.
Écrire cette équation différentielle sous forme canonique avec facteur de qualité.
2) On suppose $Q = 0,5$. Quelle est la forme littérale de la solution $x(t)$?
3) Les conditions « initiales » sont, à $t = 0$: $\dot{x}(0) = -1$ et $x(0) = 3$.
Exprimer $x(t)$ en fonction de la variable t, de la pulsation propre ω_0.

Ex-S2.2 **Équations différentielles (2)**

1) L'évolution d'une fonction $x(t)$ de la variable t est régie par une équation différentielle d'ordre 2 sans second membre.
Écrire cette équation différentielle sous forme canonique avec facteur de qualité.
2) On suppose $Q = 4$. Quelle est la forme littérale de la solution $x(t)$?
3) Les conditions « initiales » sont, à $t = 0$: $\dot{x}(0) = 1$ et $x(0) = 0$.
Exprimer $x(t)$ en fonction de la variable t, de la pulsation propre ω_0.

Ex-S2.3 **Équations différentielles (3)**

1) L'évolution d'une fonction $x(t)$ de la variable t est régie par une équation différentielle d'ordre 2 sans second membre.
Écrire cette équation différentielle sous forme canonique avec facteur de qualité.
2) On suppose $Q = 0.4$. Quelle est la forme littérale de la solution $x(t)$?
3) Les conditions « initiales » sont, à $t = 0$: $\dot{x}(0) = 0$ et $x(0) = 1$.
Exprimer $x(t)$ en fonction de la variable t, de la pulsation propre ω_0.

Solution Ex-S2.1

1) $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

2) $\Delta = \omega_0^2 \left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right) = 0$ pour $Q = 0,5$.

$\rightarrow$ racine double de l'éq. caractéristique : $r_{1/2} = r_0 = -\dfrac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$

$\rightarrow$ régime transitoire **critique** : $\boxed{x(t) = (A + Bt)\exp(-\omega_0 t)}$

3) $\begin{cases} x = (A + Bt)\exp(-\omega_0 t) \\ \dot{x} = [-\omega_0(A + Bt) + B]\exp(-\omega_0 t) \end{cases}$ $\rightarrow$ Soit $\begin{cases} x(0) & = A & = 3 \\ \dot{x}(0) & = -\omega_0.A + B & = -1 \end{cases}$ $\rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -1 \end{cases}$

$\boxed{x(t) = [3 + (3\omega_0 - 1).t].\exp(-\omega_0 t)}$

Solution Ex-S2.2

1) $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

2) $\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2}(1 - 4Q^2) = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right) = -\dfrac{63}{16}\omega_0^2 = \left(j\dfrac{3\sqrt{7}}{4}\omega_0\right)^2 < 0$ pour $Q = 4$.

$\rightarrow$ racines de l'éq. caractéristique : $r_{1/2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \dfrac{j\sqrt{|\Delta|}}{2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} = -\dfrac{1}{\tau} \pm j\omega$

$\rightarrow$ Régime transitoire **pseudo-périodique** :

$\boxed{x(t) = [A\cos(\omega.t) + B\sin(\omega.t)]\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)}$ avec $\boxed{\omega = \dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2} = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}\omega_0}$ et $\boxed{\dfrac{1}{\tau} = \dfrac{\omega_0}{2Q} = \dfrac{\omega_0}{8}}$.

3) $\begin{cases} x = [A\cos(\omega.t) + B\sin(\omega.t)]\exp\left(-\dfrac{\omega_0 \cdot}{8}t\right) \\ \dot{x} = \left[\left(B\omega - A\dfrac{\omega_0}{8}\right)\cos(\omega.t) - \left(A\omega + B\dfrac{\omega_0}{8}\right)\sin(\omega.t)\right]\exp\left(-\dfrac{\omega_0}{8}t\right) \end{cases}$

Soit $\begin{cases} x(0) & = A & = 0 \\ \dot{x}(0) & = B\omega - A\dfrac{\omega_0}{8} & = 1 \end{cases}$ $\rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \dfrac{1}{\omega} = \dfrac{8}{3\sqrt{7}}\dfrac{1}{\omega_0} \end{cases}$

$\boxed{x(t) = \dfrac{8}{3\sqrt{7}}\dfrac{1}{\omega_0}.\sin\left(\dfrac{3\sqrt{7}}{8}\omega_0.t\right)\exp\left(-\dfrac{\omega_0}{8}t\right)}$

Solution Ex-S2.3

1) $\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

2) $\Delta = \omega_0^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right) = \left(\dfrac{3}{2}\omega_0\right)^2 > 0$ pour $Q = 0.4$.

$\rightarrow$ racines de l'équation caractéristique : $r_{1/2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$ soit : $\boxed{r_1 = -\dfrac{\omega_0}{2}}$ et $\boxed{r_2 = -2\omega_0}$.

$\rightarrow$ Régime transitoire **apériodique** : $x(t) = A\exp(r_1.t) + B\exp(r_2.t)$

Soit : $\boxed{x(t) = A\exp\left(-\dfrac{\omega_0}{2}.t\right) + B\exp(-2\omega_0.t)}$

3) $\begin{cases} x = A\exp\left(-\dfrac{\omega_0}{2}.t\right) + B\exp(-2\omega_0.t) \\ \dot{x} = -\dfrac{\omega_0}{2}.A\exp\left(-\dfrac{\omega_0}{2}.t\right) - 2\omega_0.B\exp(-2\omega_0.t) \end{cases}$

Soit $\begin{cases} x(0) & = A + B & = 1 \\ \dot{x}(0) & = -\dfrac{\omega_0}{2}.A - 2\omega_0.B & = 0 \end{cases}$ $\rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{4}{3} \\ B = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Soit : $\boxed{x(t) = \dfrac{4}{3}\exp\left(-\dfrac{\omega_0}{2}.t\right) - \dfrac{1}{3}\exp(-2\omega_0.t)}$

.

.