

Introduction (2)

Exercices : Analyse dimensionnelle et Mesures

■ Calculs dimensionnels

Ex-2.1 **Période d'un pendule** : Soit un pendule simple constitué d'une masse m accrochée à l'extrémité mobile d'un fil de longueur l . On travaille dans le référentiel terrestre où le champ de pesanteur est \vec{g} .

1) Montrer, par une analyse dimensionnelle, que la période des petites oscillations de ce pendule s'écrit $T = K\sqrt{\frac{l}{g}}$, où K est une constante sans dimension.

2) Quel remarque concernant T mérite-t-elle d'être notée ?

Ex-2.2 **Vitesse de libération** : On définit v_l la vitesse de libération (ou vitesse d'évasion) d'un objet dans l'environnement de la Terre par la vitesse que l'on doit lui communiquer pour que son énergie mécanique soit nulle (→ Cf Cours de Mécanique).

1) Quels sont les paramètres pertinents pour exprimer v_l ?

2) En déduire l'expression de v_l par une analyse dimensionnelle (cette analyse étant qualitative, on rappelle que l'expression s'obtient à une constante multiplicative sans dimension près, que seule l'analyse quantitative ou l'expérience fournit).

Ex-2.3 Les grandeurs de Planck

En combinant les trois constantes \mathcal{G} , c et \hbar , on obtient les grandeurs de PLANCK suivantes :

$$\sqrt{\frac{\hbar\mathcal{G}}{c^5}}, \sqrt{\frac{\hbar\mathcal{G}}{c^3}} \text{ et } \sqrt{\frac{\hbar c}{\mathcal{G}}}.$$

1) Déterminer quelle grandeur est homogène à :

- une longueur, appelée « longueur de Planck » et notée l_P .
- une masse, appelée « masse de Planck » et notée m_P .
- une durée, appelée « durée de Planck » et notée τ_P .

2) Calculer τ_P , l_P et m_P . Pour ces applications numériques, utiliser les valeurs des constantes fournies dans la leçon **IPC2**.

3) On introduit également la « température de Planck », notée T_P à partir des constantes c , k_B et m_P (masse de Planck). Déterminer l'expression de T_P et la calculer.

► Solution

$$\tau_P = \sqrt{\frac{\hbar\mathcal{G}}{c^5}} \simeq 0,54 \cdot 10^{-43} \text{ s}$$

$$l_P = \sqrt{\frac{\hbar\mathcal{G}}{c^3}} \simeq 1,616 \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{\mathcal{G}}} \simeq 2,176 \cdot 10^{-8} \text{ kg}$$

$$\text{Température de Planck : } T_P = \frac{m_P c^2}{k_B} = 1,42 \cdot 10^{32} \text{ K}$$

Rq : Ces grandeurs ont été introduites par Planck en 1914 afin de créer un système d'unités naturelles universel fondé sur les trois constantes fondamentales \mathcal{G} , c et \hbar .

Ex-2.4 Vibration d'une goutte d'eau

La fréquence de vibration d'une goutte d'eau va dépendre de plusieurs paramètres. On supposera que la tension superficielle est le facteur prédominant dans la cohésion de la goutte ; par conséquent, les facteurs intervenant dans l'expression de la fréquence de vibration f seront :

- R , le rayon de la goutte ;
- ρ , la masse volumique, pour tenir compte de l'inertie ;
- A , la constante intervenant dans l'expression de la force due à la tension superficielle (la dimension de A est celle d'une force par unité de longueur).

On écrira donc : $f = k_1 R^a \rho^b A^c$, où k_1 est ici une constante sans dimension ; a , b et c sont les exposants de R , ρ et A .

→ En déduire les valeurs de a , b et c .

► **Solution**

$$\left. \begin{array}{l} [R] = [\text{rayon de la goutte}] = L \\ [\rho] = [\text{masse volumique}] = M L^{-3} \\ [A] = \left[\frac{\text{force}}{\text{longueur}} \right] = \frac{MLT^{-2}}{L} = M T^{-2} \\ [f] = [\text{fréquence}] = T^{-1} = [k_1 R^a \rho^b A^c] \end{array} \right\} \Rightarrow T^{-1} = L^a (M L^{-3})^b (M T^{-2})^c \left\{ \begin{array}{l} T^{-1} = T^{-2c} \\ 1 = L^a L^{-3b} \\ 1 = M^b M^c \end{array} \right.$$

$$\text{Donc : } \left\{ \begin{array}{l} 2c = 1 \\ a - 3b = 0 \\ b + c = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{f = k_1 \frac{1}{R} \sqrt{\frac{A}{R\rho}}}$$

Ex-2.5 Vibration d'une étoile : modèle de Lord Raleigh (1915)

La fréquence de vibration d'une étoile va dépendre de plusieurs paramètres. La cohésion d'une étoile étant assurée par les forces de gravitation, on s'attend à devoir faire intervenir :

- R , le rayon de l'étoile ;
- ρ , la masse volumique de l'étoile ;
- \mathcal{G} , la constante de gravitation universelle.

- 1) Donner l'expression de la fréquence de vibration f en fonction de R , ρ et \mathcal{G} : $f = k_2 R^a \rho^b \mathcal{G}^c$ (sans expliciter la constante sans dimension k_2).
- 2) Sachant que la valeur de \mathcal{G} est connue, quelles données peut-on obtenir à partir de la fréquence de vibration ?

► **Solution**

$$\left. \begin{array}{l} [R] = [\text{rayon de l'étoile}] = L \\ [\rho] = [\text{masse volumique}] = M L^{-3} \\ [\mathcal{G}] = \left[\frac{\text{force} \cdot r^2}{m_1 m_2} \right] = \frac{(MLT^{-2})L^2}{M^2} \\ = M^{-1} L^3 T^{-2} \\ [f] = [\text{fréquence}] = T^{-1} = k_2 R^a \rho^b \mathcal{G}^c \end{array} \right\} \Rightarrow T^{-1} = L^a (M L^{-3})^b (M^{-1} L^3 T^{-2})^c \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T^{-1} = T^{-2c} \\ 1 = L^a L^{-3b} L^{3c} \\ 1 = M^b M^{-c} \end{array} \right.$$

$$\text{Donc : } \left\{ \begin{array}{l} 2c = 1 \\ a - 3b + 3c = 0 \\ b - c = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{f = k_2 \sqrt{\rho \mathcal{G}}}$$

- 2) Donc, lorsque f et \mathcal{G} sont connues, la seule mesure de R donne accès à la valeur de la masse volumique ρ de l'étoile.

Ex-2.6 Chauffage d'un lingot

À partir du moment où l'on rentre un lingot froid dans un four chaud, la vitesse à laquelle augmentera la température au centre va dépendre des facteurs géométriques (on prendra L pour la dimension linéaire), de la conductibilité thermique (k), et de l'inertie thermique dans laquelle interviennent la capacité calorifique massique à pression constante c_p et la masse, ce qui nécessite l'introduction de la masse volumique ρ .

Soit t , la durée nécessaire pour atteindre une température donnée au centre du lingot. En appelant θ la dimension de la température et T celle du temps, on calculera les exposants de

l'expression de t : $t = k_3 c_P^a \rho^b k^c L^d$ (ici, k_3 est une constante sans dimension).

Rq1 : $c_P \equiv \frac{1}{m} \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$, où H note l'enthalpie (homogène à une énergie, → Cf Cours de Thermodynamique) du système de masse m .

Rq2 : La « conductibilité » thermique ou « conductivité » thermique lie le vecteur densité de flux thermique (homogène à une puissance par unité de surface) au gradient de la température (homogène à une température divisée par une longueur) : $\vec{j}_{th} \equiv -k \overrightarrow{grad} T$ (loi de FOURIER).

► **Solution**

$$t = k_3 (c_P^a \rho^b k^c L^d)$$

Cherchons d'abord la dimension de la conductivité thermique k :

$$[k] = \frac{[\vec{j}_{th}]}{[\overrightarrow{grad} T]} = \frac{[W.m^{-2}]}{[K.m^{-1}]} = \frac{(M L^2 T^{-3}) L^{-2}}{\theta L^{-1}} = M L T^{-3} \theta^{-1}$$

Et comme :

$$[L] = [\text{longueur caractéristique}] = L,$$

$$[c_P] = [\text{capacité thermique à pression constante}] = L^2 T^{-2} \theta^{-1},$$

$$[\rho] = [\text{masse volumique}] = M L^{-3}, \text{ on en déduit :}$$

$$T = (L^2 T^{-2} \theta^{-1})^a (M L^{-3})^b (M L T^{-3} \theta^{-1})^c L^d$$

$$\begin{cases} T = T^{-2a} T^{-3c} \\ 1 = L^{2a} L^{-3b} L^c L^d \\ 1 = \theta^{-a} \theta^{-c} \\ 1 = M^b M^c \end{cases} \implies \begin{cases} 2a + 3c = -1 \\ 2a - 3b + c + d = 0 \\ a + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -1 \\ d = 2 \end{cases}$$

$$\implies \boxed{t = k_3 \frac{c_P \rho L^2}{k}}$$

■ **Calculs d'incertitudes expérimentales**

Ex-2.7 Indice du verre dont est constitué un prisme

Lorsqu'on mesure l'indice du verre dont est constitué le prisme d'un spectrogoniomètre, on aboutit à la formule :

$$n = \frac{\sin \frac{A + D_m}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

où A est l'angle du prisme, mesuré avec une certaine incertitude ΔA ,

et D_m est le minimum de déviation mesuré avec une certaine incertitude ΔD_m .

1) En utilisant la différentiation logarithmique, exprimer $\frac{\Delta n}{n}$, incertitude relative sur la mesure de l'indice, en fonction de A , ΔA , D_m et ΔD_m .

2) En fait, l'incertitude sur A et D_m est la même et on note $\Delta A = \Delta D_m = \epsilon$. Montrer que, compte tenu des valeurs numériques de A et D_m , l'incertitude relative sur la mesure s'écrit alors :

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\epsilon}{2} \cotan \frac{A}{2}$$

3) *Application numérique.* On donne : $A = 60^\circ 00'$; $D_m = 34^\circ 25'$; $\epsilon = 4'$. Déterminer les incertitudes relative et absolue sur l'indice n . Donner le résultat sous la forme : $n = \quad \pm \quad$.

Ex-2.8 **Mesure de la focale d'une lentille** Dans la méthode de BESSEL, qui sera utilisée en T.P., la focale est donnée par la formule :

$$f = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

où D et d , avec $D > d$, sont des distances mesurées avec les incertitudes ΔD et Δd .

- 1) En utilisant la différentiation logarithmique, exprimer $\frac{\Delta f}{f}$ en fonction de Δd et ΔD .
- 2) En fait, l'incertitude sur D est la même que celle sur d . En déduire l'expression de $\frac{\Delta f}{f}$.
- 3) *Application numérique.* On donne : $d = 5,0 \text{ cm}$; $D = 1,500 \text{ m}$; $\Delta d = \Delta D = 5 \text{ mm}$.
Calculer les incertitudes relative et absolue sur f .
Donner le résultat sous la forme : $f = \quad \pm \quad$.

Ex-2.9 **Champ de pesanteur**

À l'altitude z au-dessus de la surface de la Terre, le champ de pesanteur est égal à :

$$g = \mathcal{G} \frac{M_T}{(R_T + z)^2}$$

où M_T est la masse de la Terre, R_T son rayon et \mathcal{G} la constante de gravitation universelle.

Données : champ de pesanteur au niveau du sol : $g_0 = 9,807 \text{ m.s}^{-2}$; rayon de la Terre : $R_T = 6371 \text{ km}$.

- 1) Quelle est la variation relative élémentaire $\frac{dg}{g}$ provoquée par une variation d'altitude dz ?
- 2) Calculer $\frac{\Delta g}{g_0}$ (petit accroissement relatif) et Δg (petit accroissement) pour une élévation de 8000 m au-dessus de la surface de la Terre. En déduire valeur de g à cette altitude.

► **Solution**

$$1) \ln g = \ln \mathcal{G} + \ln M_T - 2 \ln(R_T + z) \longrightarrow \frac{dg}{g} = -2 \frac{dz}{R_T + z} \quad (\text{donc, quand } z \nearrow, g \searrow).$$

$$2) \frac{\Delta g}{g_0} = -\frac{2}{R_T + z} \Delta z = -\frac{2}{6371 \cdot 10^3} 8 \cdot 10^3 = -2,5 \cdot 10^{-3} = -0,25\%.$$

$$\frac{\Delta g}{g_0} = -0,25\%$$

$$\Delta g = -0,025 \text{ m.s}^{-2}$$

$$g = g_0 + \Delta g = 9,782 \text{ m.s}^{-2}$$