# Introduction (2)

## Analyse dimensionnelle, mesures et résultats

« La physique mesure notre rapport au monde le plus normé, le mieux distingué. »

Jean Clet MARTIN – *Éloge de l'inconsommable* (2006)

# I Grandeurs, unités et dimensions

## I.1 Le système d'Unités International (S.I.)

♢ **Définition :** *Mesurer* une **grandeur physique** $X$ revient à la *comparer* à une autre, de même nature, $X_0$, prise arbitrairement comme **unité**, en effectuant leur rapport :

$$m_X = \frac{X}{X_0}$$

Le résultat de la mesure est un nombre, la valeur de $X$, accompagné de son unité car, en physique, il est impensable (et insensé !) de ne pas préciser la nature de l'unité.

On parlera d'**unité de base** si elle est indépendante de toutes les autres. Ceci exige qu'on la rattache à un *étalon*, conventionnellement choisi, en général pour sa simplicité et l'universalité de son mode de réalisation.
Toutes les autres **unités**, dites **dérivées**, découlent des unités de base à partir de *relations de définition*.

Dans le Système International (SI), on compte actuellement **sept** unités de base :

**1)** L'unité de **durée** est la **seconde** ($s$)
La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux énergétiques de l'atome de césium 133.

**2)** L'unité de **longueur** est le **mètre** ($m$)
Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 seconde.
Cette définition résulte d'une convention adoptée en 1983 par la communauté internationale qui consiste à fixer la vitesse de la lumière dans le vide $c$ à *exactement* 299 792 485 $m.s^{-1}$, la constante $c$ étant une constante fondamentale de la nature.

**3)** L'unité de **masse** est le **kilogramme** ($kg$)
Le kilogramme est la masse du prototype en platine iridié qui a été sanctionné par la Conférence Générale des Poids et Mesures (CPGM), tenue à Paris en 1889, et qui est déposé au Bureau International des Poids et Mesures (BIPM).
Notons que l'étalon de masse est le seul étalon matériel : il subit une contamination réversible de surface d'environ 1 $\mu g.an^{-1}$ nécessitant un nettoyage-lavage périodique spécifique. aussi, le Comité International a-t-il déclaré que la masse de référence est celle qui suit immédiatement cette procédure de nettoyage. ainsi définie, la masse de référence est utilisée pour étalonner ses copies conservées par différents pays. Cette particularité explique que cet étalon soit encore sujet de recherche, car les physiciens veulent à terme le remplacer par un étalon universel fondé sur les lois fondamentales.

**4)** L'unité d'**intensité de courant** est l'**ampère** ($A$)
L'ampère est l'intensité du courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de un mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force de $2.10^{-7}$ newton par mètre de longueur.
Le nom de cette unité est celui du physicien français André-marie AMPÈRE qui travaillé sur les courants électriques au XIX$^{e}$ siècle.

**5)** L'unité de **température** est le **kelvin** ($K$)
Le kelvin est la fraction $1/273,16$ de la température thermodynamique du point triple de l'eau.

➜ Cours de Thermodynamique – En ce point, noté $III$, les trois phases de l'eau (solide, liquide, gaz) coexistent ; la température et la pression valent respectivement $T_{III} = 273,16\ K$ et $P_{III} = 0,613\ kPa$.
Le nom de cette unité a été choisi en hommage au physicien écossais William THOMSON, devenu Lord Kelvin.

**6)** L'unité d'**intensité lumineuse** est la **candela** ($cd$)

La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique, de fréquence $540.10^{12}\ Hz$ et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 watt par stéradian.
Cette fréquence correspond à une longueur d'onde dans le vide de 555 $nm$, c'est-à-dire à la couleur jaune-vert, pour laquelle l'œil humain est le plus sensible le jour. Indiquons que le stéradian est l'unité de mesure d'un angle solide, notion qui généralise dans l'espace celle d'angle plan.

**7)** L'unité de **quantité de matière** est la **mole** ($mol$)

La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0,012 kilogramme de carbone 12.

## I.2 Dimensions des grandeurs physiques

◇ **Définition :** On appelle **dimension physique** la propriété ou la grandeur physique associée à une unité.

• Par exemple, dans le cours de Maths Sup/Spé, nous rencontrerons essentiellement 5 des 7 dimensions de base :
- le « temps » (noté $T$) est la dimension/grandeur physique associée à l'unité « seconde »
- la « longueur » (notée $L$) est la dimension/grandeur physique associée à l'unité « mètre »
- la « masse » (notée $M$) est la dimension/grandeur physique associée à l'unité « kilogramme »
- l'« intensité » (notée $I$) est la dimension/grandeur physique associée à l'unité « ampère »
- la « température » (notée $\Theta$) est la dimension/grandeur physique associée à l'unité « kelvin »

• Ainsi, on dira que la distance $d$ parcourue dans l'espace par un point, ou que la longueur $l = \Delta x = x_2 - x_1$ entre deux points $M_1$ et $M_2$ sur un axe $Ox$

$\left\{\begin{array}{l}\text{sont homogènes à une longueur}\\ \text{ont la dimension d'une longueur}\end{array}\right.$ ce qui se traduit symboliquement par : $\left\{\begin{array}{l}[d] = L\\ [l] = [\Delta x] = L\end{array}\right.$

• Certaines grandeurs ont leur unité et leur dimension qui s'expriment directement à partir des unités et grandeurs de base.
Par exemple, la vitesse d'un point matériel ($v = \dot{x}$ pour une trajectoire rectiligne selon $Ox$) :
- a pour dimension $L.T^{-1}$ car : $[v] = [\dot{x}] = \left[\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right] = \dfrac{[\mathrm{d}x]}{[\mathrm{d}t]} = \dfrac{L}{T} = L.T^{-1}$
- son unité est donc le $m.s^{-1}$.

• Les unités dérivées peuvent être, elles aussi, associées à des dimensions physiques.
C'est le cas pour la « charge électrique » qui est la dimension correspondant à l'unité dérivée qu'est le « Coulomb » ($C$).
Mais là encore, ces unités s'expriment en fonctions des unités des grandeurs de base (cf. **I.3**).

## I.3 Équation aux dimensions

◇ **Définition :** On appelle **équation aux dimension** une équation reliant la dimension d'une grandeur $G$ à celles des grandeurs de base.

$$[G] = T^{\alpha}.L^{\beta}.M^{\gamma}.I^{\delta}.\Theta^{\epsilon}.J^{\zeta}.N^{\eta}$$

**Application :** Établir la dimension : d'une force, d'une énergie, d'une puissance et d'une tension.

### I.4 Analyse dimensionnelle

♢ **Définition :** L'**analyse dimensionnelle** est une méthode *qualitative* d'investigation qui consiste à :
- identifier l'ensemble des paramètres pertinents d'un phénomène physique
- pour en déduire la dépendance d'une grandeur en fonction de ces paramètres.
Cette analyse ne permet évidemment pas de déterminer les facteurs numériques qui s'obtiennent par l'expérience ou une étude quantitative.

**Application :** Chercher **Ex-2.1, 2.2**.

### I.5 Les quatre types d'erreurs à ne jamais commettre parce que c'est... mal !

**Erreur physique ou erreur d'homogénéité :** il est absurde d'écrire l'égalité entre deux grandeurs de dimensions différentes.

**Ex :** Il est impossible d'écrire qu'une distance $d$ ($[d] = L$) est identique à un instant $t$ ($[t] = T$), car leurs dimensions sont différentes : $L \neq T$.
**Par contre**, l'équation horaire

$$d = \alpha.t + \beta \quad \text{ne sera correcte que si} \quad [d] = [\alpha.t] = [\beta],$$

*i.e* à la seule condition que $\alpha$ soit homogène à une longueur sur un temps ($[\alpha] = L.T^{-1}$) et que $\beta$ soit homogène à une longueur ($[b] = L$).

**Erreur :** il est absurde d'écrire l'égalité entre une grandeur finie et une grandeur élémentaire.

**Ex :** ne pas confondre l'expression du théorème de l'énergie cinétique (➜ Cf Cours de Mécanique) pendant une durée élémentaire d$t$ (aussi petite que l'on veut : d$t \to 0$) avec celle du même théorème au cours d'une durée finie $\delta t = t_2 - t_1 \neq 0$.
Ainsi les expressions suivantes

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_k = \delta W(\overrightarrow{F}_{\mathsf{ext}}) \qquad \text{et} \qquad \Delta\mathcal{E}_k = W(\overrightarrow{F}_{\mathsf{ext}})$$

sont correctes mais $\cancel{\Delta\mathcal{E}_k = \delta W(\overrightarrow{F}_{\mathsf{ext}})}$ est fausse.

**Erreur mathématique :** il est absurde d'écrire l'égalité entre un nombre (un scalaire) et un vecteur.

- ne jamais confondre un vecteur $\overrightarrow{V}$ et sa norme $V = \| \overrightarrow{V} \|$
- ne jamais confondre un vecteur $\overrightarrow{V}$ et une de ses coordonnées ($V_x$ par exemple, si on projette $\overrightarrow{V} = V_x \overrightarrow{e_x} + V_y \overrightarrow{e_y} + V_z \overrightarrow{e_z}$ dans la base cartésienne)
- ne jamais confondre un produit vectoriel $\overrightarrow{U} \times \overrightarrow{V}$ (qui est un vecteur) et un produit scalaire $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{V}$ (qui est un nombre)

**Erreur mathématique 2 :** il est absurde d'écrire l'égalité entre un vecteur polaire et un vecteur axial.

➜ Cf Cours de Mécanique et d'Électromagnétisme. Quelques explications en attendant : certains vecteurs appelés « vecteurs polaires » ou « vecteurs vrais » – comme les vecteurs position $\overrightarrow{r}$, vitesse $\overrightarrow{v}$, accélération $\overrightarrow{a}$ ou force $\overrightarrow{F}$ – sont définis indépendamment de toute convention d'orientation de l'espace, contrairement à d'autres appelés « vecteurs axiaux » ou « pseudo-vecteurs » – comme le champ magnétique $\overrightarrow{B}$, indissociablement lié à une convention d'orientation de l'espace. La règle d'orientation de l'espace est celle des « trois doigts de la main droite ».
**Par contre**, l'égalité entre deux grandeurs dont l'une comporte un vecteur polaire et l'autre un vecteur axial, peut ne pas être physiquement absurde. Par exemple, la force de Lorentz (➜ Cf Cours d'Électromagnétisme) qui s'exerce sur une particule électrique, de charge $q$, de vitesse $\overrightarrow{v}$ et soumise au champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$, a pour expression : $\overrightarrow{F}_L = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B})$.

# II Constantes fondamentales de la physique

## II.1 Constantes fondamentales classiques

Les cinq constantes fondamentales classiques sont les suivantes :

| | |
|---|---|
| La constante de gravitation universelle : | $\mathcal{G} \approx 6,67.10^{-11}\ m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ |
| La vitesse de la lumière dans le vide : | $c \approx 3.10^8\ m.s^{-1}$ |
| La charge élémentaire : | $e \approx 1,60.10^{-19}\ C$ |
| La masse de l'électron : | $m_e \approx 9,1.10^{-31}\ kg$ |
| La masse du proton : | $m_p \approx 1,672.10^{-27}\ kg$ |

**Rq :** Il peut être utile de connaître l'ordre de grandeur du rapport des masses du proton et de l'électron : $\boxed{\dfrac{m_p}{m_e} \approx 1\,836 \sim 2\,000}$.

## II.2 Autres constantes

Il existe d'autres les constantes, dont les suivantes, qui sont moins fondamentales, car conventionnelles, mais qui jouent un rôle important :

• La perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ SI$, qui intervient dans les phénomènes magnétiques (➜ Cf Cours d'Électromagnétisme).

• Le nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A \approx 6,02.10^{23}\ mol^{-1}$, qui est le rapport entre des masses conventionnelles associées aux différents éléments chimiques et les masses des atomes correspondants. Autrement dit, $\mathcal{N}_A$ est le nombre d'entités chimiques présentes dans une mole de l'entité : une mole d'eau contient $\mathcal{N}_A$

• La constante de Boltzmann : $k_B \approx 1,38.10^{-23}\ J.K^{-1}$, qui se rencontre en physique statistique, c'est-à-dire lorsqu'on étudie des systèmes macroscopiques constitués d'un grand nombre d'éléments microscopiques (de l'ordre de $\mathcal{N}_A$) (➜ Cf Cours de Thermodynamique).

## II.3 Constante de Planck

La constante de Planck (notée $h$) a été introduite par Max Planck en 1901 pour interpréter le rayonnement des corps (ce que ne pouvait expliquer la physique « classique » et qui relève de la physique « quantique »). On admet qu'un atome émet de la lumière en cédant de l'énergie : la relation entre cette perte d'énergie et la fréquence du rayonnement émis est linéaire ; le cœfficient de proportionnalité est précisément la constante de Planck :

$$\Delta\mathcal{E} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad \text{avec} \quad h \approx 6,626.10^{-34}\ J.s$$

On introduit souvent la grandeur dérivée $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} \approx 1,05.10^{-34}\ J.s$.

◇ **Définition :** La dimension de $h$ est celle d'une **action**, c'est-à-dire le produit d'une énergie $\mathcal{E}$ par un temps $t$ ou d'une quantité de mouvement $p$ par une longueur $l$ :

$$u(h) = J.s \quad \Leftrightarrow \quad [h] = [\mathcal{E}][t] = [p][l] \quad \text{d'où} \quad [h] = M.L^2.T^{-1}$$

**Rôle de la constante de Planck :** La constante de Planck marque la limite entre la physique classique et la physique quantique.

Pour résoudre correctement un problème, il faut savoir si on doit le traiter dans le cadre quantique ou dans celui de l'approximation classique – ne serait-ce que parce que cette dernière est bien plus simple à mettre en œuvre. Pour ce faire, il suffit de comparer la constante de Planck avec une grandeur physique de même dimension, c'est-à-dire une action caractéristique du problème.

**Ex1 :** Dans le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène, l'électron est en mouvement circulaire autour du noyau, à une distance $r \sim a_0 = 52,9\ pm$ de ce dernier. La loi fondamentale de Newton (➜ Cf Cours de Mécanique) donne :

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \quad \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r}}$$

d'où la grandeur $m_e v.r$, homogène à une quantité de mouvement par une longueur caractéristique du problème (action) :

$$m_e v.r = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} m_e r} \approx 10^{-35}\ J.s \ll h$$

**Cl :** On en déduit qu'un traitement complet du problème relève de la mécanique quantique.

**Ex2 :** Dans un accélérateur de particule tel qu'un synchrotron, les protons ont une trajectoire circulaire dont le rayon peut être de l'ordre du kilomètre (!).
La quantité de mouvement $p = mv$ est reliée au champ magnétique et au rayon $R$ par la relation : $p = mv = BeR$ (➜ Cf Cours d'Électromagnétisme).
Comme $B$ est de l'ordre de $1\ T$, on en déduit l'action $p.R$ caractéristique du problème :

$$p.R = BeR^2 \approx 1.1,6.10^{-19}.10^6 = 1,6.10^{-13}\ J.s \gg h$$

**Cl :** Le traitement de ce problème peut donc être simplement classique.

**Rq :** Dans notre cours de Maths Sup/Spé, nous nous limitons à la physique classique.

**Retenir :** Les quantités $\mathcal{G}$, $c$ et $h$ sont des constantes essentielles de la physique.

# III Erreurs et incertitudes

## III.1 Erreur absolue et erreur relative

◇ **Définition :** On appelle **erreur absolue** (notée $\Delta G$) la différence entre la *valeur mesurée* ($G_m$) et la *valeur exacte* (ou tabulée, $G_e$) de la grandeur $G$.
L'**erreur relative** est l'expression de l'erreur absolue en terme de pourcentage.

$$\Delta G = G_m - G_e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta G}{G_e} = \frac{G_m - G_e}{G_e}$$

**Ex :** intensité de la pesanteur en France (Paris) :

$$\left.\begin{array}{l} g_{\text{mesurée}} = 9,71\ N.kg^{-1} \\ g_{\text{exact}} = 9,81\ N.kg^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta g = -0,10\ N.kg^{-1} \qquad \frac{\Delta g}{g} = \frac{-0,10}{9,81} \sim -10^{-2} = -1\,\%$$

**Rq :** Les erreurs ont un *signe* : dans le cas de l'exemple, il s'agit d'une « erreur par défaut » ($< 0$) de 1 %. Dans le cas contraire, on parlerait d'« erreur par excès ».
**Mais** le plus souvent, on ne connaît pas la valeur exacte de la grandeur que l'on mesure. *On estime alors la précision de la mesure en donnant* non pas une erreur mais *une incertitude.*

## III.2 Incertitude absolue :

Si $X = X_{\text{exact}}$ est la grandeur et $X_{\text{mes}} = X_{\text{mesurée}}$ le résultat de la mesure de cette grandeur :

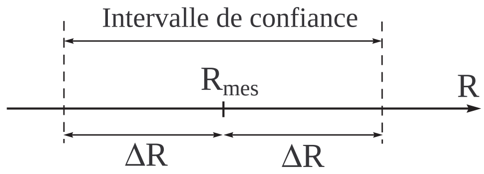
$$X_{\text{mesurée}} - \Delta X < X_{\text{exact}} < X_{\text{mesurée}} + \Delta X \quad \Leftrightarrow \quad X = X_{\text{mes}} \pm \Delta X$$

où :
$\Delta X > 0$ est l'**incertitude absolue**
et $\dfrac{\Delta X}{X_{\text{mes}}}$ est l'**incertitude relative** (ou « pourcentage »).

L'incertitude absolue exprime la **confiance** dans un résultat.

**Ex :** on mesure à l'ohmmètre une résistance $R$ ; l'ohmmètre donne une valeur ($R_{\text{mes}}$). L'expérimentateur ne connaît pas la valeur exacte de la résistance ; d'ailleurs, l'indication sur la résistance n'est qu'approximative car le fabriquant de la résistance lui-même n'en connaît pas la valeur *exacte*. Par contre, le constructeur de l'ohmmètre fournit l'appareil avec une notice indiquant **l'intervalle de confiance**, centré sur la **valeur mesurée** (affichée) à l'ohmmètre et dans lequel on est sûr de trouver la **valeur exacte** (inconnue).

Ainsi, plus **l'intervalle de *confiance*** est petit, et plus on peut avoir *confiance* en la mesure — puisque si $\Delta R \to 0$ alors $R_{\text{mes}} \to R_{\text{exact}}$.




• On mesure donc la résistance d'un conducteur ohmique au multimètre à affichage numérique. On lit sur l'écran :

$$R = 12,2468\ \Omega$$

• Le constructeur dit que l'appareil a une « précision » de : $0,1\ \% + 2$ digits.

◇ **Définition :** Un **digit** est l'unité correspondant au dernier chiffre affiché sur le calibre choisi.

Sachant cela, comme dans notre cas le dernier chiffre affiché sur le calibre choisi est « 8 » et qu'il correspond à $0,0001\ \Omega$, on en déduit que dans cette mesure $\boxed{1\text{digit} = 0,0001\ \Omega = 0,1\ m\Omega}$.

• On peut maintenant calculer le demi intervalle de confiance qui est **l'incertitude absolue** :

$$\Delta R = 0,1\%.R + 2.0,1\ m\Omega$$

en nous rappelant que l'appareil n'est précis qu'à $0,1\ m\Omega$ près ; soit :

$$\Delta R = (0,0122\cancel{468} + 0,0002)\ m\Omega \ \Rightarrow\ \underline{\Delta R = 0,0124\ \Omega \simeq 0,013\ \Omega \simeq 0,02\ \Omega}$$

($i$) On donnera l'incertitude absolue avec 1 ou 2 chiffres significatifs au maximum.
($ii$) On arrondit toujours au chiffre supérieur.
($iii$) L'incertitude absolue n'est pas algébrique : elle représente la valeur absolue de l'erreur maximale commise sur la mesure.
($iv$) **C'est donc l'incertitude absolue qui indique le nombre de chiffres significatifs du résultats.**

Dans le cas de l'exemple, en arrondissant 12,2468 au 1/100$^e$ ou au 1/1000$^e$ *le plus proche* (on ne tronque pas) :

$$\boxed{R = (12,25 \pm 0,02)\ \Omega} \quad \text{ou} \quad \boxed{R = (12,247 \pm 0,013)\ \Omega}$$

## III.3 Incertitude relative

L'incertitude relative est parfois appelée **précision**.

$$\frac{\Delta R}{R} = \begin{cases} \dfrac{0,02}{12,25} & = \ 1,63...10^{-3} \ \simeq \ 2.10^{-3} \ = \ 0,2\,\% \\[2ex] \dfrac{0,013}{12,247} & = \ 1,06...10^{-3} \ \simeq \ 1.10^{-3} \ = \ 0,1\,\% \end{cases}$$

Une précision de 0,2 % est plus que suffisante pour la mesure d'une résistance usuelle → il était donc ici inutile de conserver deux chiffres significatifs dans l'expression de l'incertitude absolue sur $R$ ; il suffisait de prendre : $\Delta R = 0,02\ \Omega$.

### III.4 Causes et types d'erreurs (Cf. TPs)

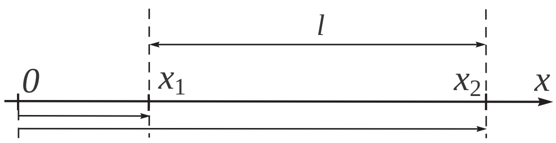
• Les erreurs de mesures peuvent avoir trois causes : l'expérimentateur, l'appareil de mesure ou la méthode employée.
• Elles peuvent être de deux types :
- Les *erreurs systématiques* se reproduisent identiques à elles-mêmes à chaque mesure (mauvais réglage du zéro d'un appareil à aiguille, erreur dans la méthode employée...)
$\rightarrow$ De telles erreurs peuvent être éliminées avant la prise finale de mesures (en vérifiant les réglages initiaux, en changeant de méthode...)
- Les *erreurs aléatoires* sont des erreurs différentes à chaque mesure, par excès ou par défaut, sur lesquelles l'expérimentateur n'a pas prise.
$\rightarrow$ pour les éliminer (après s'être auparavant débarrassé des erreurs systématiques) : il faut faire un grand nombre de mesures puis faire une moyenne.

# IV Calculs d'incertitude sur une mesure indirecte

• Le plus souvent, une **grandeur** $G$ n'est pas mesurable directement. Néanmoins, cette grandeur $G$ peut être **calculée** en fonction de grandeurs $X$, $Y$ et $Z$ ($G = G(X, Y, Z)$), lesquelles sont **mesurables** expérimentalement et donc accessibles avec des **incertitudes absolues** $\Delta X$, $\Delta Y$ et $\Delta Z$ connues.

• **Si** les mesures sont telles que : $\Delta X \ll X_{(mes)}$, $\Delta Y \ll Y_{(mes)}$ et $\Delta Z \ll Z_{(mes)}$,
**alors** les **incertitudes absolues** sont suffisamment petites par rapport à $X$, $Y$ et $Z$ pour être assimilées à des **petites variations**, ce qui permet l'utilisation du **calcul différentiel** (➔ Cf Cours **IPC1**).

**Exemple 1 :** Mesure d'une longueur par différence de deux distances (Cf. Banc d'Optique en TPs)
$l = x_2 - x_1$
En fait, on mesure $x_1$ et $x_2$ à $1\,mm$ près si l'axe est gradué en millimètres :
$x_{1,\text{exact}} = x_1 \pm \Delta x$
et $x_{2,\text{exact}} = x_2 \pm \Delta x$ avec $\Delta x = 1\ mm$




*Au pire* : on va faire une erreur par *défaut* de $1\,mm$ sur $x_1$ ($dx_1 = -1\ mm$) alors qu'on fera une erreur par *excès* de $1\,mm$ sur $x_2$ ($dx_2 = +1\ mm$) ...
$\rightarrow$ Alors $l$ sera donnée avec une erreur de $+2\,mm$ qui correspond à l'erreur *maximale* que l'on peut faire.

Dans le calcul d'incertitudes, on se placera toujours dans le cas le plus défavorable en supposant que **les incertitudes s'ajoutent**

❏ **Méthode IV.1.—** En général, lorsque $G = a.X + b.Y$,
avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,
$X$ et $Y$ étant mesurés à $\Delta X$ et $\Delta Y$ près,
pour connaître l'incertitude $\Delta G$ sur $G$ :
- on différentie $G$ : $\mathrm{d}G = a.\mathrm{d}X + b.\mathrm{d}Y$
- on prend la valeur absolue de chaque terme en revenant aux incertitudes :

$\Delta G = \mid a \mid .\Delta X + \mid b \mid .\Delta Y$ et $G = G_{\text{calculée}} \pm \Delta G$

**Exemple 2 :** On calcule la résistance d'un conducteur ohmique en mesurant $U$ et $I$ à $\Delta U$ et $\Delta I$ près :

$$\begin{cases} R & = \dfrac{U}{I} \\ R_{\text{calc}} & = \dfrac{U_{\text{mes}}}{I_{\text{mes}}} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} U & = U_{\text{mes}} \pm \Delta U \\ I & = I_{\text{mes}} \pm \Delta I \end{cases}$$

Que vaut l'incertitude relative $\dfrac{\Delta R}{R}$ lorsque $\dfrac{\Delta U}{U} = \dfrac{\Delta I}{I} = 1\%$ ?

Il suffit de faire la différentielle logarithmique de $R$ :

$$\mathrm{d}\ln R = \mathrm{d}\ln\left(\frac{U}{I}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}R}{R} = \frac{\mathrm{d}U}{U} - \frac{\mathrm{d}I}{I}$$

En se plaçant dans le cas le plus défavorable où les erreurs s'ajoutent, on obtient l'incertitude absolue sur $R$ :

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta R = R_{\text{calc}}.\left(\frac{\Delta U}{U_{\text{mes}}} + \frac{\Delta I}{I_{\text{mes}}}\right)}$$

❑ **Méthode IV.2.—** En général, lorsque $G = K.\dfrac{X^\alpha.Y^\beta}{Z^\gamma}$,
avec $K$, $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ des réels,
$X$, $Y$ et $Z$ étant mesurés à $\Delta X$, $\Delta Y$ et $\Delta Z$ près,
pour connaître l'incertitude $\Delta G$ sur $G$ :
- on effectue une différentielle logarithmique de $G$ : $\dfrac{\mathrm{d}G}{G} = \alpha.\dfrac{\mathrm{d}X}{X} + \beta.\dfrac{\mathrm{d}Y}{Y} - \gamma.\dfrac{\mathrm{d}Z}{Z}$
- on prend la valeur absolue de chaque terme en revenant aux incertitudes :

$$\frac{\Delta G}{G} = \mid \alpha \mid .\frac{\Delta X}{\mid X \mid} + \mid \beta \mid .\frac{\Delta Y}{\mid Y \mid} + \mid \gamma \mid .\frac{\Delta Z}{\mid Z \mid}$$

- pour déterminer $\Delta G$, il suffit de faire $\Delta G = \dfrac{\Delta G}{G}.G_{\text{calculée}}$ alors :

$$G = G_{\text{calculée}} \pm \Delta G$$

**Exemple 3 :**