Introduction (2)
Exercices : Analyse dimensionnelle et Mesures

■ Calculs dimensionnels

Ex-2.1 **Période d'un pendule :** Soit un pendule simple constitué d'une masse m accrochée à l'extrémité mobile d'un fil de longueur l. On travaille dans le référentiel terrestre où le champ de pesanteur est $\overrightarrow{g}$.
1) Montrer, par une analyse dimensionnelle, que la période des petites oscillations de ce pendule s'écrit $T = K\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, où K est une constante sans dimension.
2) Quel remarque concernant T mérite-t-elle d'être notée ?

Ex-2.2 **Vitesse de libération :** On définit v_l la vitesse de libération (ou vitesse d'évasion) d'un objet dans l'environnement de la Terre par la vitesse que l'on doit lui communiquer pour que son énergie mécanique soit nulle (➜ Cf Cours de Mécanique).
1) Quels sont les paramètres pertinents pour exprimer v_l ?
2) En déduire l'expression de v_l par une analyse dimensionnelle (cette analyse étant qualitative, on rappelle que l'expression s'obtient à une constante multiplicative sans dimension près, que seule l'analyse quantitative ou l'expérience fournie).

Ex-2.3 **Les grandeurs de Planck**
En combinant les trois constantes $\mathcal{G}$, c et $\hbar$, on obtient les grandeurs de Planck suivantes : $\sqrt{\dfrac{\hbar\mathcal{G}}{c^5}}$, $\sqrt{\dfrac{\hbar\mathcal{G}}{c^3}}$ et $\sqrt{\dfrac{\hbar c}{\mathcal{G}}}$.
1) Déterminer quelle grandeur est homogène à :
- une longueur, appelée « longueur de Planck » et notée l_P.
- une masse, appelée « masse de Planck » et notée m_P.
- une durée, appelée « durée de Planck » et notée τ_P.

2) Calculer τ_P, l_P et m_P. Pour ces applications numériques, utiliser les valeurs des constantes fournies dans la leçon **IPC2**.
3) On introduit également la « température de Planck », notée T_P à partir des constantes c, k_B et m_P (masse de Planck). Déterminer l'expression de T_P et la calculer.

➤ Solution

$\boxed{\tau_P = \sqrt{\dfrac{\hbar\mathcal{G}}{c^5}} \simeq 0,54.10^{-43}\ s}$ $\boxed{l_P = \sqrt{\dfrac{\hbar\mathcal{G}}{c^3}} \simeq 1,616.10^{-35}\ m}$ $\boxed{m_P = \sqrt{\dfrac{\hbar c}{\mathcal{G}}} \simeq 2,176.10^{-8}\ kg}$

Température de Planck : $\boxed{T_P = \dfrac{m_P c^2}{k_B} = 1,42.10^{32}\ K}$

Rq : Ces grandeurs ont été introduites par Planck en 1914 afin de créer un système d'unités naturelles universel fondé sur les trois constantes fondamentales $\mathcal{G}$, c et $\hbar$.

Ex-2.4 **Vibration d'une goutte d'eau**
La fréquence de vibration d'une goutte d'eau va dépendre de plusieurs paramètres. On supposera que la tension superficielle est le facteur prédominant dans la cohésion de la goutte ; par conséquent, les facteurs intervenant dans l'expression de la fréquence de vibration f seront :
- R, le rayon de la goutte ;
- ρ, la masse volumique, pour tenir compte de l'inertie ;
- A, la constante intervenant dans l'expression de la force due à la tension superficielle (la dimension de A est celle d'une force par unité de longueur).

On écrira donc : $f = k_1\, R^a\, \rho^b\, A^c$, où k_1 est ici une constante sans dimension ; a, b et c sont les exposants de R, ρ et A.
→ En déduire les valeurs de a, b et c.

➤ Solution

$$\left.\begin{array}{lcl} [R] &=& [\text{rayon de la goutte}] = L \\ [\rho] &=& [\text{masse volumique}] = M\,L^{-3} \\ [A] &=& \left[\dfrac{\text{force}}{\text{longueur}}\right] = \dfrac{MLT^{-2}}{L} = M\,T^{-2} \\ [f] &=& [\text{fréquence}] = T^{-1} = [k_1\, R^a\, \rho^b\, A^c] \end{array}\right\} \Longrightarrow T^{-1} = L^a\,(M\,L^{-3})^b\,(M\,T^{-2})^c \left\{\begin{array}{lcl} T^{-1} &=& T^{-2c} \\ 1 &=& L^a\,L^{-3b} \\ 1 &=& M^b\,M^c \end{array}\right.$$

$$\text{Donc :} \quad \left\{\begin{array}{lcl} 2c &=& 1 \\ a-3b &=& 0 \\ b+c &=& 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -\frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{f = k_1\,\frac{1}{R}\sqrt{\frac{A}{R\,\rho}}}$$

Ex-2.5 Vibration d'une étoile : modèle de Lord Raleigh (1915)

La fréquence de vibration d'une étoile va dépendre de plusieurs paramètres. La cohésion d'une étoile étant assurée par les forces de gravitation, on s'attend à devoir faire intervenir :

- R, le rayon de l'étoile ;
- ρ, la masse volumique de l'étoile ;
- $\mathcal{G}$, la constante de gravitation universelle.

1) Donner l'expression de la fréquence de vibration f en fonction de R, ρ et $\mathcal{G}$: $f = k_2\, R^a\, \rho^b\, \mathcal{G}^c$ (sans expliciter la constante sans dimension k_2).

2) Sachant que la valeur de $\mathcal{G}$ est connue, quelles données peut-on obtenir à partir de la fréquence de vibration ?

➤ Solution

1)

$$\left.\begin{array}{lcl} [R] &=& [\text{rayon de l'étoile}] = L \\ [\rho] &=& [\text{masse volumique}] = M\,L^{-3} \\ [\mathcal{G}] &=& \left[\frac{\text{force}.r^2}{m_1\,m_2}\right] = \frac{(MLT^{-2})\,L^2}{M^2} \\ &=& M^{-1}\,L^3\,T^{-2} \\ [f] &=& [\text{fréquence}] = T^{-1} = k_2\,R^a\,\rho^b\,\mathcal{G}^c \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow T^{-1} = L^a\,(M\,L^{-3})^b\,(M^{-1}\,L^3\,T^{-2})^c \\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} T^{-1} &=& T^{-2c} \\ 1 &=& L^a\,L^{-3b}\,L^{3c} \\ 1 &=& M^b\,M^{-c} \end{array}\right. \end{array}$$

$$\text{Donc :} \quad \left\{\begin{array}{lcl} 2c &=& 1 \\ a-3b+3c &=& 0 \\ b-c &=& 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{f = k_2\,\sqrt{\rho\,\mathcal{G}}}$$

2) Donc, lorsque f et $\mathcal{G}$ sont connues, la seule mesure de R donne accès à la valeur de la masse volumique ρ de l'étoile.

Ex-2.6 Chauffage d'un lingot

À partir du moment où l'on rentre un lingot froid dans un four chaud, la vitesse à laquelle augmentera la température au centre va dépendre des facteurs géométriques (on prendra L pour la dimension linéaire), de la conductibilité thermique (k), et de l'inertie thermique dans laquelle interviennent la capacité calorifique massique à pression constante c_P et la masse, ce qui nécessite l'introduction de la masse volumique ρ.

Soit t, la durée nécessaire pour atteindre une température donnée au centre du lingot. En appelant θ la dimension de la température et T celle du temps, on calculera les exposants de l'expression de t : $t = k_3\, c_P^a\, \rho^b\, k^c\, L^d$ (ici, k_3 est une constante sans dimension).

Rq1 : $c_P \equiv \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{\partial H}{\partial T}\right)_P$, où H note l'enthalpie (homogène à une énergie, ➜ Cf Cours de Thermodynamique) du système de masse m.
Rq2 : La « conductibilité » thermique ou « conductivité »thermique lie le vecteur densité de flux thermique (homogène à une puissance par unité de surface) au gradient de la température (homogène à une température divisée par une longueur) : $\overrightarrow{j_{th}} \equiv -k\,\overrightarrow{gradT}$ (loi de Fourier).

➤ Solution
$t = k_3\,(c_P^a\,\rho^b\,k^c\,L^d)$
Cherchons d'abord la dimension de la conductivité thermique k :

$$[k] = \frac{[\overrightarrow{j_{th}}]}{[\overrightarrow{gradT}]} = \frac{[W.m^{-2}]}{[K.m^{-1}]} = \frac{(M\,L^2\,T^{-3})\,L^{-2}}{\theta\,L^{-1}} = M\,L\,T^{-3}\,\theta^{-1}$$

Et comme :
$[L]$ = [longueur caractéristique] $= L$,
$[c_P]$ = [capacité thermique à pression constante] $= L^2\,T^{-2}\,\theta^{-1}$,
$[\rho]$ = [masse volumique] $= M\,L^{-3}$, on en déduit :

$$T = (L^2\,T^{-2}\,\theta^{-1})^a\,(M\,L^{-3})^b\,(M\,L\,T^{-3}\,\theta^{-1})^c\,L^d$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} T &=& T^{-2a}\,T^{-3c} \\ 1 &=& L^{2a}\,L^{-3b}\,L^c\,L^d \\ 1 &=& \theta^{-a}\,\theta^{-c} \\ 1 &=& M^b\,M^c \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2a+3c &=& -1 \\ 2a-3b+c+d &=& 0 \\ a+c &=& 0 \\ b+c &=& 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \\ c=-1 \\ d=2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \boxed{t = k_3\,\frac{c_P\,\rho\,L^2}{k}}$$

■ Calculs d'incertitudes expérimentales

Ex-2.7 Indice du verre dont est constitué un prisme

Lorsqu'on mesure l'indice du verre dont est constitué le prisme d'un spectrogoniomètre, on aboutit à la formule :

$$n = \frac{\sin\dfrac{A+D_m}{2}}{\sin\dfrac{A}{2}}$$

où A est l'angle du prisme, mesuré avec une certaine incertitude ΔA,
et D_m est le minimum de déviation mesuré avec une certaine incertitude ΔD_m.

1) En utilisant la différentiation logarithmique, exprimer $\dfrac{\Delta n}{n}$, incertitude relative sur la mesure de l'indice, en fonction de A, ΔA, D_m et ΔD_m.
2) En fait, l'incertitude sur A et D_m est la même et on note $\Delta A = \Delta D_m = \epsilon$. Montrer que, compte tenu des valeurs numériques de A et D_m, l'incertitude relative sur la mesure s'écrit alors :

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{\epsilon}{2}\,\mathrm{cotan}\,\frac{A}{2}$$

3) *Application numérique.* On donne : $A = 60°00'$; $D_m = 34°25'$; $\epsilon = 4'$. Déterminer les incertitudes relative et absolue sur l'indice n. Donner le résultat sous la forme : $n = \quad \pm \quad$.

Ex-2.8 **Mesure de la focale d'une lentille** Dans la méthode de Bessel, qui sera utilisée en T.P., la focale est donnée par la formule :

$$f = \frac{D^2 - d^2}{4\,D}$$

où D et d, avec $D > d$, sont des distances mesurées avec les incertitudes ΔD et Δd.

1) En utilisant la différentiation logarithmique, exprimer $\dfrac{\Delta f}{f}$ en fonction de Δd et ΔD.

2) En fait, l'incertitude sur D est la même que celle sur d. En déduire l'expression de $\dfrac{\Delta f}{f}$.

3) *Application numérique.* On donne : $d = 5,0\ cm$; $D = 1,500\ m$; $\Delta d = \Delta D = 5\ mm$.
Calculer les incertitudes relative et absolue sur f.
Donner le résultat sous la forme : $f = \quad \pm \quad$.

Ex-2.9 **Champ de pesanteur**
À l'altitude z au-dessus de la surface de la Terre, le champ de pesanteur est égal à :

$$g = \mathcal{G}\,\frac{M_T}{(R_T + z)^2}$$

où M_T est la masse de la Terre, R_T son rayon et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle.

Données : champ de pesanteur au niveau du sol : $g_0 = 9,807\ m.s^{-2}$; rayon de la Terre : $R_T = 6\,371\ km$.

1) Quelle est la variation relative élémentaire $\dfrac{dg}{g}$ provoquée par une variation d'altitude dz ?

2) Calculer $\dfrac{\Delta g}{g_0}$ (petit accroissement relatif) et Δg (petit accroissement) pour une élévation de $8\,000\ m$ au-dessus de la surface de la Terre. En déduire valeur de g à cette altitude.

➤ Solution

1) $\ln g = \ln \mathcal{G} + \ln M_T - 2\ln(R_T + z) \longrightarrow \boxed{\dfrac{dg}{g} = -2\,\dfrac{dz}{R_T + z}}$ (donc, quand $z \nearrow$, $g \searrow$).

2) $\dfrac{\Delta g}{g_0} = -\dfrac{2}{R_T + z}\,\Delta z = -\dfrac{2}{6\,371.10^3}\,8.10^3 = -2,5.10^{-3} = -0,25\%$.

$$\boxed{\frac{\Delta g}{g_0} = -0,25\%} \qquad \boxed{\Delta g = -0,025\ m.s^{-2}} \qquad \boxed{g = g_0 + \Delta g = 9,782\ m.s^{-2}}$$