Introduction (1)
Petites variations et valeurs moyennes

« le livre de la nature est écrit de telle sorte dans le monde qu'il nous faut comprendre d'abord le premier chapitre avant de percevoir le sens du second (...). Pourtant les feuilles sont si éparpillées qu'il nous faut repérer et classer ce qui nous paraît constituer les premières pages. »
James C. MAXWELL (1831-1879) – *Les propriétés des corps* (1856)

« Le Livre de la nature est écrit en langage mathématique. »
Galileo Galilei dit GALILÉE (1564-1642) – *Il Saggiatore* (1623)

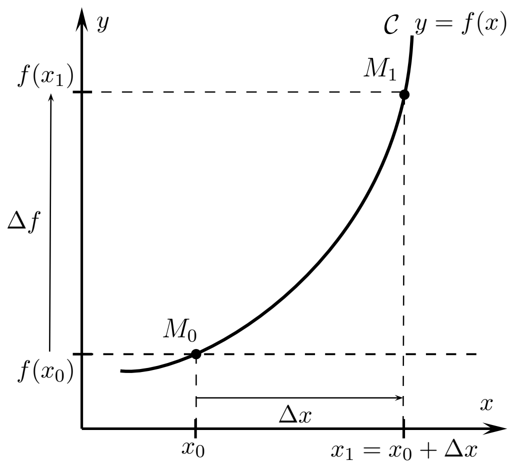
I Exemple du ballon qu'on gonfle

➜ Cf. **Cours** .

II Fonction scalaire d'une seule variable

II.1 Variation ou accroissement Δ d'une grandeur

• Soit une **fonction d'une seule variable** $y = f(x)$ définie sur un intervalle donné des nombres réels $\mathbb{R}$.
À toute valeur $x = x_0$ de la variable x correspond sur le graphe une valeur $y = f(x_0)$ de la fonction f.
Sur la **courbe $\mathcal{C}$ représentative** de f, M_0 est le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$.



• Si on envisage une variation Δx de x, il en résultera une variation Δf de $f(x)$.
Graphiquement, le point représentatif M_0 passera en M_1 de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ tel que :

$$\begin{cases} x_1 &= x_0 + \Delta x \\ f(x_1) &= f(x_0) + \Delta f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} \Delta x &=& x_1 - x_0 \\ \Delta f &=& f(x_1) - f(x_0) \end{array}$$

◊ **Définition :** Les symboles Δx et Δf sont tout ce qu'il y a de physiques : ils représentent les **variations (ou accroissements)** des deux grandeurs x et f qui accompagne le passage d'une situation physique (représentée sur le graphe par M) à une autre situation physique (représentée sur le graphe par M').
Attention ! La variation d'une grandeur G est *algébrique* :

$$\Delta G = G_{\text{final}} - G_{\text{initial}}$$

II.2 Dérivée d'une fonction

◊ **Définition :** On dit que la fonction réelle f est **dérivable** au point x_0 lorsque la limite

$$\lim_{x_1 \to x_0} \left\{ \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \right\} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \equiv f'(x_0) \text{ existe}$$

On appelle $f'(x_0)$ la **dérivée** de f au point x_0.

▮ Notation : En physique, où très souvent plusieurs variables (paramètres) interviennent dans un même problème, on utilisera une notation équivalente, mais qui a l'avantage de faire apparaître la variable dont dépend f et par rapport à laquelle on la dérive : $\boxed{f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}$

Pour parler de la dérivée de f par rapport à x, on utilisera essentiellement la notation $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$

Rq : On écrit aussi $f' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f]$. Sous cette forme apparaît *l'opérateur* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ « dérivée par rapport à x » appliqué à la fonction f : il transforme la fonction f en sa dérivée f'.

• On peut effectuer plusieurs fois de suite cette opération (lorsque c'est possible). On note ces dérivées successives :

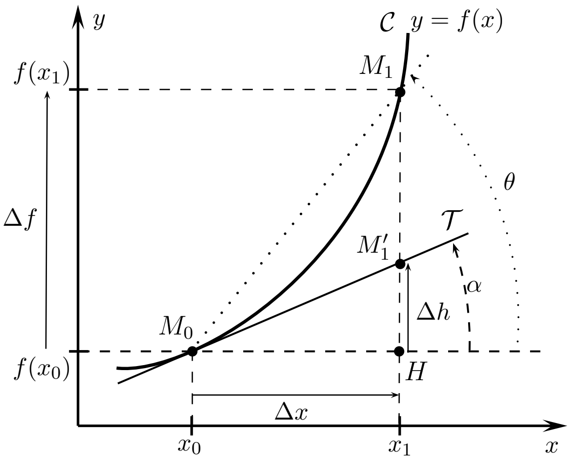
$$f', \quad f'', \quad \ldots, f^{(n)}, \quad \ldots \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, \quad \ldots, \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}, \quad \ldots$$

II.3 Interprétation géométrique de la dérivée

• Sur le graphe de f, le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, au point d'abscisse x_0, représente la tangente de l'angle θ que fait la sécante (M_0M_1) avec l'axe des abscisses Ox du graphe :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{HM_1}{M_0H} = \tan\theta$$

• Lorsque M_1 se rapproche de M_0, la position limite de la sécante (M_0M_1) s'identifie à la courbe $\mathcal{T}$ qui est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point M_0.



L'angle θ prend alors la valeur α et on a : $\boxed{f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \tan\alpha}$.

• Or, $\tan\alpha$ représente le cœfficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ passant par M_0 $(x_0, f(x_0))$.
On en déduit facilement son équation cartésienne $y = h(x)$ puisque :

$$f'(x_0) = \tan\alpha = \frac{h(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{h(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Soit : $h(x) = a.x + b$ avec $\begin{cases} a = f'(x_0) & \text{pente ou cœfficient directeur} \\ b = f(x_0) - x_0.f'(x_0) & \text{ordonnée à l'origine} \end{cases}$

• Remarquons que, lorsqu'on se déplace sur la tangente $\mathcal{T}$, la variation de h entre M_0 et M'_1 correspondant la variation Δx de la variable est : $\Delta h = h(x_1) - h(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.

II.4 Notion de petite variation

Lorsqu'on s'écarte *peu* de la valeur initiale x_0
Lorsque Δx est *suffisamment* petit
Graphiquement, lorsque M_1 est *suffisamment* proche de M_0
} on a $\boxed{\Delta f \simeq \Delta h = f'(x_0)\Delta x}$

Il s'agit d'une *approximation*, qui sera d'autant plus *précise* que Δx sera *petit*.
On parle alors d'une **petite variation** (ou **petit accroissement**) Δf de la fonction f associé à la **petite variation** (ou **petit accroissement**) Δx de la variable x.

II.5 Variation élémentaire et différentielle d'une fonction

◇ **Définition :** Lorsqu'on imagine une variation aussi petite que l'on veut, on ne parle plus de petite variation mais de **variation élémentaire** ou **de variation infinitésimale** et on remplace la notation « Δ » par la notation « d ».

Si $\Delta x \to 0$ Δx se note $\mathrm{d}x$ et s'appelle **variation élémentaire** de la variable x

Si $\Delta f \to 0$ Δf se note $\mathrm{d}f$ et s'appelle **variation élémentaire** de la fonction f

$$\mathrm{d}f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$$

Par passage à la limite lorsqu'on passe d'une petite variation à une variation élémentaire dela variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Expression approchée} \\ \Delta f \simeq f'(x_0).\Delta x \end{array} \right. \xrightarrow{\Delta x \to 0} \left\{ \begin{array}{l} \text{Expression exacte} \\ \mathrm{d}f = f'(x_0).\mathrm{d}x \end{array} \right.$$

◇ **Définition :** On établit que la variation élémentaire $\mathrm{d}f$ de la *physique* s'identifie avec ce qu'on appelle **différentielle** de f en *mathématiques*.

Alors, la notation « d » représente l'*opérateur* « différentiation (par rapport à la variable donnée) » appliqué à la fonction f.

$$\left. \begin{array}{l} \textit{Sens physique} \\ \textbf{variation élémentaire de } f \\ \text{au voisinage de } x_0 \end{array} \right\} \leftarrow \boxed{\mathrm{d}f = f'(x_0).\mathrm{d}x} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \textit{Sens mathématique} \\ \textbf{différentielle de } f \\ \text{au voisinage de } x_0 \end{array} \right.$$

II.6 Développements limités

• Puisque $\Delta f \simeq f'(x_0)\Delta x$ (cf. **I.5**) pour une **petite variation** de x :

Développement limité d'ordre 1 de $f(x)$ autour de la position x_0 :

$$f(x_1) \simeq f(x_0) + f'(x_0).(x_1 - x_0) \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0).\Delta x \qquad \textbf{(DL}_1\textbf{)}$$

• Si on a besoin d'une approximation plus fine, il faut pousser le développement à l'ordre supérieur en puissance de Δx.

Développement limité d'ordre 2 de $f(x)$ autour de la position x_0 :

$$\begin{array}{l} f(x_1) \simeq f(x_0) + f'(x_0).(x_1 - x_0) + f''(x_0)\dfrac{(x_1 - x_0)^2}{2} \\ \Leftrightarrow \\ f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0).\Delta x + \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0).\dfrac{(\Delta x)^2}{2} \end{array} \qquad \textbf{(DL}_2\textbf{)}$$

• Voici les principaux **DL** susceptibles d'être utilisés dans le cours de physique, pour des fonctions évaluées en $x_0 = 0$ avec $\Delta x = x - x_0 = x \ll 1$:

Ordre 1 en x	Ordre 2 en x
$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$	$(1+x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}.x^2$
$e^x \simeq 1 + x$	$e^x \simeq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$
$\ln(1+x) \simeq x$	$\ln(1+x) \simeq x - \dfrac{x^2}{2}$
$\cos x \simeq 1$	$\cos x \simeq 1 - \dfrac{x^2}{2}$
$\sin x \simeq x$	$\sin x \simeq x$

II.7 Dérivée et différentielle d'une fonction composée

♢ **Définition :** Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et g une fonction réelle définie dans l'intervalle $u(I)$. Si u est dérivable en x_0 et g dérivable en $u(x_0)$, alors $F = g \circ u = g[u(x)]$ est dérivable en x_0 et :

$$F'(x_0) = g'[u(x_0)].u'(x_0) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}[u(x_0)].\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

La fonction $F'(x) = g'[u(x)].u'(x)$ est appelée la **fonction dérivée composée** de F. On en déduit facilement sa différentielle : $\mathrm{d}F(x) = F'(x).\mathrm{d}x = g'[u(x)].\mathrm{d}u$.

Ex : La fonction dérivée par rapport au temps t de $F = a\cos[\theta(t)]$ est : $F'(x) = -a\sin[\theta(t)]\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.

II.8 Dérivée et différentielle logarithmiques

• On appelle **dérivée logarithmique** la dérivée de la fonction $F(x) = \ln f(x)$.
C'est donc un cas particulier important de dérivée composée lorsque $F(x) = g[u(x)]$ avec $u = f$ et $g : f(x) \mapsto \ln f(x)$. On obtient donc :

$$F'(x) = (\ln\circ f)'(x) = \frac{\mathrm{d}\ln f}{\mathrm{d}f}.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f}.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \textbf{Retenir :} \quad F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

• On appelle la **différentielle logarithmique** de f la différentielle de la fonction $F(x) = \ln f(x)$.
De ce qui précède, on déduit :

$$\mathrm{d}\ln f = \mathrm{d}F \equiv F'(x).\mathrm{d}x = \frac{1}{f}.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}f}{f} \qquad \textbf{Retenir :} \quad \mathrm{d}F = \mathrm{d}\ln f = \frac{\mathrm{d}f}{f}$$

II.9 Primitive, intégrale et somme

À l'opération *dérivation* (**II.2**) correspond une opération réciproque qui consiste à exprimer la *primitive* d'une fonction f de la variable x. On cherche alors une fonction F dont la dérivée est la fonction f initialement donnée.

♢ **Définition :** • Lorsque $F(x)$ est *une* **primitive** de $f(x)$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x), \text{ qu' on peut encore écrire : } \mathrm{d}F(x) = f(x).\mathrm{d}x$$

et **les primitives** de $f(x)$ ne diffèrent entre elles que par une constante.

• Un troisième opérateur permet d'atteindre $F(x)$ à partir de la connaissance de sa différentielle $\mathrm{d}F(x)$. Il s'agit de l'*opérateur* « **intégration** (par rapport à la variable x) » symbolisé par le *signe* « **somme** » $\int$:

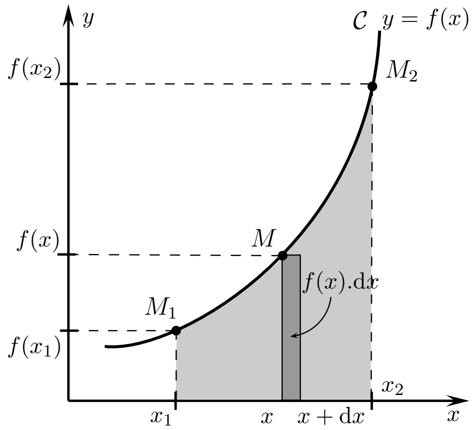
$$F(x) = \int \mathrm{d}F(x) = \int f(x).\mathrm{d}x$$

Présenté ainsi, une primitive de f correspond à une **intégrale indéfinie** puisqu'il n'y a pas de bornes à l'opération d'intégration.

♢ **Définition :** Par contre, on appellera « **intégrale** (définie) de la fonction f entre x_1 et x_2 » ou encore « **somme** de f entre x_1 et x_2 », le réel I tel que :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x).\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}F(x) = \Big[F(x)\Big]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

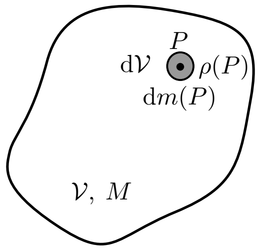
II.10 Interprétation géométrique de la somme



• La somme I s'interprète, dans le plan (x, y) comme une somme d'« aires »élémentaire $f(x).\mathrm{d}x$ entre les bornes x_1 et x_2.

Ainsi, I représente l'aire située sous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction $y = f(x)$, limitée par l'axe des abscisses Ox et les droites d'équation $x = x_1$ et $x = x_2$.

• **En physique**, l'importance du calcul intégral vient du fait qu'on peut traiter une situation complexe à partir de la situation la plus simple qui soit, qui fera intervenir un élément différentiel de longueur ($\mathrm{d}l$, ou longueur élémentaire), de surface ($\mathrm{d}S$, ou surface élémentaire), de volume ($\mathrm{d}\mathcal{V}$, ou volume élémentaire), de masse ($\mathrm{d}m$, ou masse élémentaire), de charge ($\mathrm{d}q$, ou charge élémentaire), ...



Exemple : La masse M d'un volume $\mathcal{V}$ de matière inhomogène de masse volumique $\rho(P) = \dfrac{\mathrm{d}m(P)}{\mathrm{d}\mathcal{V}}$ peut s'écrire comme la somme des masse élémentaires $\mathrm{d}m(P)$ de tous les volumes élémentaire centrés en chacun des points P qui constituent le volume $\mathcal{V}$:

$$M = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{d}m(P) = \int_{\mathcal{V}} \rho(P)\mathrm{d}\mathcal{V}$$

II.11 Valeur moyenne d'une fonction ➜ Cf. Cours

II.12 Valeur efficace en électricité ➜ Cf. Cours

III Fonction scalaire de plusieurs variables

III.1 Dérivées partielles

◇ **Définition :** Soit $f(x, y, z)$ une fonction réelle, définie sur une partie de $\mathbb{R}^3$ contenant le point (x_0, y_0, z_0).
Pour (y_0, z_0) donnés, la fonction $f(x, y_0, z_0)$ est une fonction g de la seule variable x. Si cette fonction est dérivable en x_0, sa dérivée s'appelle la **dérivée partielle** de f par rapport à x au point (x_0, y_0, z_0). On la note :

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$$

De même on définit f'_y et f'_z.
Les fonctions $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$ et $f'_z(x, y, z)$ sont les fonctions *dérivées partielles de f par rapport à* x, y et z respectivement.

Rq : On peut effectuer plusieurs fois de suite cette opération (lorsque c'est possible). On note ces dérivées successives :

$$f'_x, \quad f''_x, \quad f''_{xy}, \quad \ldots, f_x^{(n)}, \quad \ldots \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \quad \ldots$$

Les dérivées d'ordre multiple par rapport à des variables différentes sont appelées « dérivées (partielles) croisées ».

Application : Faire l'exercice **Ex-1.9**.

III.2 Dérivée d'une fonction de plusieurs variables

La fonction $f(x, y, z)$ dépend de trois variables x, y et z qui, elles-mêmes, peuvent dépendre d'un paramètre t. **En physique**, t sera généralement le *temps*. La fonction f apparaît alors comme une fonction implicite du temps : $f[x(t), y(t), z(t)] = f(t)$. Si elle est dérivable, on a :

$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{f'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}.x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}.y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}.z'(t)}$$

III.3 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

De ce qui précède, on peut facilement déduire la différentielle de $f[x(t), y(t), z(t)] = f(t)$ par rapport à t en revenant à la définition :

$$\mathrm{d}f \equiv f'(t).\mathrm{d}t = \left(\frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right).\mathrm{d}t \quad \text{Soit :} \quad \boxed{\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}.\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}.\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}.\mathrm{d}z}$$

Interprétation physique : Dans l'expression précédente, pour une fonction à trois variables, $\mathrm{d}f$ se met sous la forme de trois termes : $\mathrm{d}f = \delta f_x + \delta f_y + \delta f_z$. Que représentent ces trois termes *physiquement* ?
En physique, on étudie souvent un système $\mathcal{S}$ caractérisé par une telle fonction f. Alors la différentielle $\mathrm{d}f$ correspond à la variation élémentaire de la fonction $f[x(t), y(t), z(t)] = f(t)$ entre l'instant t_0 où le système est dans l'« état initial » (x_0, y_0, z_0) et l'instant $t'_0 = t_0 + \mathrm{d}t$ infiniment proche où $\mathcal{S}$ est dans l'« état final » (x'_0, y'_0, z'_0).
Pendant la durée élémentaire $\mathrm{d}t$:
• x a subit une variation élémentaire qui l'a amené de x_0 à x'_0 et cette variation élémentaire $\mathrm{d}x = x'_0 - x_0$ contribue à la variation élémentaire de f par le terme : $\delta f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}.\mathrm{d}x$
• y a subit une variation élémentaire qui l'a amené de y_0 à y'_0 et cette variation élémentaire $\mathrm{d}y = y'_0 - y_0$ contribue à la variation élémentaire de f par le terme : $\delta f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}.\mathrm{d}y$
• z a subit une variation élémentaire qui l'a amené de z_0 à z'_0 et cette variation élémentaire $\mathrm{d}z = z'_0 - z_0$ contribue à la variation élémentaire de f par le terme : $\delta f_z = \dfrac{\partial f}{\partial z}.\mathrm{d}z$

III.4 Dérivée et différentielle logarithmiques

L'emploi de la dérivée logarithmique est particulièrement intéressante lorsque la fonction f met en jeu un produit ou un quotient.

Ex : Ainsi, si $f(t) = f[u(t), v(t), w(t)] = K.\dfrac{u^\alpha v^\beta}{w^\gamma}$ (avec K, α, β et γ des constantes),
il est judicieux de poser $F = \ln|f| = \ln|K| + \alpha\ln|u| + \beta\ln|v| - \gamma\ln|w|$ car alors :

$$F'(t) = \frac{f'}{f} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{f'}{f} = \alpha\frac{u'}{u} + \beta\frac{v'}{v} - \gamma\frac{w'}{w}} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}F(t) = \frac{\mathrm{d}f}{f} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}f}{f} = \alpha\frac{\mathrm{d}u}{u} + \beta\frac{\mathrm{d}v}{v} - \gamma\frac{\mathrm{d}w}{w}}$$

Conclusion : dans une dérivée ou une différentielle logarithmique :
- les *produits* se transforment en *sommes*
- les *rapports* se transforment en *différences*
- les *exposants* se transforment en *facteurs multiplicatifs*.

III.5 Exercice : application du calcul différentiel au calcul de faibles variations

Soient n moles fixées d'un gaz parfait. Sachant que $PV = nRT$, établir les relations entre $\mathrm{d}P$, $\mathrm{d}V$ et $\mathrm{d}T$ lorsque P, V et T varient de manière élémentaire, en opérant a) une différentiation simple, b) une différentiation logarithmique. Vérifier que l'équivalence des deux opérations.