Introduction (1)

Exercices : Petites variations, valeurs moyennes

■ Calculs de petites variations

❑ **Méthode 1.—** De manière générale :
il est souvent plus simple de faire une différentiation simple ou logarithmique des expressions mathématiques sans calculer de dérivée partielle.

Ex-1.1 Volume d'un cylindre
On considère un cylindre de dimensions $R = R_0 = 0,1\ m$ et $h = h_0 = 0,1\ m$.
Quelle est la variation relative de son volume :
1) quand on diminue le rayon de 1 mm ?
2) quand on diminue le rayon de 1 mm et que l'on augmente la hauteur de 1 mm ?

Ex-1.2 Satellite artificiel soumis à des frottements
L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ et la vitesse v d'un satellite en orbite circulaire sont données en fonction du rayon r de son orbite par les relations :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{m_T\, m}{r} \qquad \text{et} \qquad v = \sqrt{\mathcal{G}\frac{m_T}{r}}$$

Dans ces expressions $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle, m_T la masse de la terre et m celle du satellite et l'énergie mécanique est négative.
1) lorsque, par suite des frottements, son énergie mécanique diminue : $\Delta\mathcal{E}_m \simeq \mathrm{d}\mathcal{E}_m$ est de quel signe ? Comment varie le rayon ? et la vitesse ?
2) L'énergie mécanique diminue de 1%. Que vaut la variation relative du rayon ? de la vitesse ?

Ex-1.3 Compression adiabatique d'un gaz parfait
On considère un gaz de volume $V = V_0 = 0,1\ m^3$ et de pression $P = P_0 = 10^5\ Pa$ enfermé dans un cylindre surmonté d'un piston. On appuie rapidement sur le piston jusqu'à diminuer le volume de $1\,L$.
On utilise comme modèle de gaz celui du gaz parfait et comme modèle de transformation celui de la transformation adiabatique (échanges thermiques nuls entre le gaz et le milieu extérieur).
Dans ce cadre, pression et volume sont liés par la « loi de Laplace » : $PV^\gamma = \mathrm{Cte}$ ($\gamma = 1,4$).
1) Calculer $\dfrac{\Delta P}{P_0} \simeq \dfrac{\mathrm{d}P}{P_0}$, la variation **relative** de pression correspondante (en %).
2) Puis calculer $\Delta P \simeq \mathrm{d}P$, la variation **absolue** de pression.

Ex-1.4 Horloge à balancier
Le balancier d'une horloge qui bat la seconde est assimilable à un pendule simple.
On rappelle la relation entre période T et longueur l :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \text{(On prendra } g = 9,81\ m.s^{-2}\text{)}$$

1) Quelle est la période T_0 du blancier de l'horloge ?
2) Calculer la longueur l_0 de ce balancier.
3) Que vaut ΔT, variation de la période, pour une petite variation de la longueur $\Delta l = 1\ cm$?
♦ **Indications :** Comme $\Delta l \ll l_0$, on peut utiliser le calcul différentiel avec la notation infinitésimale : $\Delta l \simeq \mathrm{d}l$ et $\Delta T \simeq \mathrm{d}T$.
4) On désire que la précision du fonctionnement de l'horloge soit de 1 s par jour.
→ Quelle doit être alors la précision Δl sur la valeur de la longueur ?

Ex-1.5 **Température à la surface des planètes**

La température T_T à la surface de la Terre est reliée à la température de surface du Soleil T_S par une relation de la forme :

$$\boxed{T_T^4 = K\frac{T_S^4}{D^2}} \quad \text{où} \quad \begin{cases} K & \text{est une constante} \\ D & \text{la distance Terre-Soleil} \end{cases}$$

Cette loi en T^4 s'appelle « loi du corps noir ».

On donne comme valeurs moyennes : $T_T = 300\ K$, $T_S = 6\,000\ K$ et $D = 150.10^6\ km$.

1) Dans cette question, T_S est supposée constante. De quelle distance faudrait-il que la Terre se déplace pour faire varier sa température de $1\ °C$? Que peut-on prévoir sur Mars ($D = 200$ millions de km) et sur vénus ($D = 108$ millions de km) ?

2) De combien de degrés la température de surface du Soleil varie-t-elle lorsque T_T varie de $1\ °C$?

■ Dérivées

Ex-1.6 **Calcul d'une dérivée**

Calculer la dérivée temporelle de la fonction $f(t) = A\exp(\lambda t)cos(\omega t + \varphi)$ dans lesquelles A, λ, ω et φ sont des constantes.

Que peut-on dire des dimensions et des unités de A, λ, ω ?

Ex-1.7 **Fonction d'état d'un gaz parfait**

Les paramètres d'un gaz qui suit le modèle du gaz parfait sont régis par la fonction d'état : $PV = nRT$ où la pression apparaît comme une fonction des variables T, V et n.

1) Écrire P sous la forme $P = P(T, V, n)$

2) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 : $\dfrac{\partial P}{\partial T}$, $\dfrac{\partial P}{\partial V}$ et $\dfrac{\partial P}{\partial n}$.

3) En déduire les dérivées croisées d'ordre 2 : $\dfrac{\partial^2 P}{\partial V \partial T}$, $\dfrac{\partial^2 P}{\partial n \partial T}$, $\dfrac{\partial^2 P}{\partial T \partial V}$, $\dfrac{\partial^2 P}{\partial n \partial V}$, $\dfrac{\partial^2 P}{\partial T \partial n}$ et $\dfrac{\partial^2 P}{\partial V \partial n}$.

Quelle propriétés des dérivées croisées a-t-on mis en évidence ?

Ex-1.8 **Loi d'Arrhénius et énergie d'activation**

Soit la réaction $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \to \alpha'_1 A'_1 + \alpha'_2 A'_2$ dont la vitesse de réaction $v = \dfrac{1}{\alpha'_i}\dfrac{\mathrm{d}[A'_i]}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{\alpha_i}\dfrac{\mathrm{d}[A_i]}{\mathrm{d}t}$ s'écrit : $v = k.[A_1]^{q_1}[A_2]^{q_2}$ (➜ Cf Cours de **Cinétique chimique**).

k s'appelle la constante de vitesse de la réaction.

Elle est reliée à la température par la **loi d'Arrhénius** :

$$\boxed{k = A.\mathrm{exp}\left(-\frac{\mathcal{E}_a}{RT}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A & : \text{facteur de fréquence (même unité que } k) \\ T & : \text{température (en } K) \\ R & : \text{constante des gaz parfaits } (8,314\ J.K.mol^{-1}) \\ \mathcal{E}_a & : \text{énergie d'activation de la réaction } (J.mol^{-1}) \end{cases}$$

1) En déduire $\ln k = f\left(\dfrac{1}{T}\right)$; décrire la courbe correspondante en prenant $\dfrac{1}{T}$ comme abscisse.

2) Écrire la loi d'Arrhénius sous la forme suivante (appelé « forme différentielle » bien que mettant en jeu une dérivée) : $\dfrac{\mathrm{d}\ln k}{\mathrm{d}T} = \dots$

3) Sur un petit domaine de température (de largeur $\Delta T \leq 50\ K$), $\mathcal{E}_a$ peut être supposée constante.

Si on note $k_i = k(T_i)$ la constante de vitesse de réaction à la température T_i sur le domaine de température considéré, exprimer $\ln\dfrac{k_1}{k_2}$ en fonction de $\mathcal{E}_a$, R et des températures T_1 et T_2 correspondantes.

■ Fonctions du temps et valeurs moyennes

Ex-1.9 Fonctions sinusoïdales

1) Représenter sur un même graphe les fonctions $\cos \omega t$ et $\cos^2 \omega t$ après avoir linéarisé cette deuxième fonction.
2) On note $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ la période des oscillations de la première fonction.
→ Quelle est alors la période des oscillations de la deuxième ?
3) Calculer les valeur moyennes de $\cos(\omega t + \varphi)$ et de $\cos^2(\omega t + \varphi)$.
Vérifier graphiquement ce calcul. **Retenir ces résultats** et les utiliser pour l'exercice suivant.

Ex-1.10 Intensité et puissance électrique en régime sinusoïdal

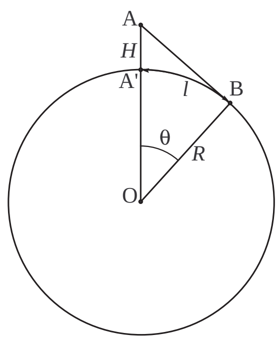
Soient $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ la tension aux bornes d'un dipôle et $i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t)$ l'intensité qui traverse le dipôle.
La puissance instantanée reçue par le dipôle vaut $p(t) = u(t)\, i(t)$. Calculer :
1) la valeur moyenne de l'intensité $< i(t) >$.
2) la valeur efficace de l'intensité I_{eff}
3) la valeur moyenne de la puissance $< p(t) >$.

Ex-1.11 Redressement mono-alternance

On considère un circuit en régime sinusoïdal dans lequel une diode ne laisse passer que les alternances positives du courant.
Recopier les graphes de l'exercice « **Fonctions sinusoïdales** », et y tracer au stylo rouge les alternances qui correspondraient à un courant $i(t)$ positif de valeur crête égale à $I_{\max} = 1\ A$, puis le graphe correspondant à $i^2(t)$.
1) Quelles sont les périodes de $i(t)$ et de $i^2(t)$?
2) Définir la fonction $i(t)$ en distinguant deux intervalles de temps. Calculer $< i >$ et $< i^2 >$.
Quelle est alors la valeur efficace du courant ?

■ Développements limités

Ex-1.12 Limite de visibilité



On suppose la terre sphérique, de rayon $R = 6\,400\ km$.
1) Depuis le point A à une altitude $H = A'A$ au-dessus du niveau du sol terrestre on observe l'horizon : on voit donc jusqu'au point B de la surface terrestre.
Déterminer la limite de visibilité l, longueur de l'arc de cercle $A'B$.
2) En déduire jusqu'à quelle distance on peut voir, par beau temps, depuis le sommet de la Tour EIFFEL sachant que le troisième étage est à $276\ m$ au-dessus du sol.

Solution Ex-1.5

En considérant que les variations des variables – T_T et D en **1)**, T_T et T_S en **2)** – sont assimilables à des petits accroissements, on peut appliquer le calcul différentiel.

1) • $T_T^4 = K\,\dfrac{T_S^2}{D^2} \longrightarrow 4\ln T_T = \ln K + 4\ln T_S - 2\ln D \longrightarrow \boxed{4\,\dfrac{dT_T}{T_T} = 4\,\dfrac{dT_S}{T_S} - 2\,\dfrac{dD}{D}}$ $(\star)$.

Si la température de la Terre chute de $1°C$, $\Delta T_T = -1\ K$.
Et dans cette question T_S est supposée fixe ($dT_S = 0$), d'où :

$$\boxed{\Delta D = -2D\,\frac{\Delta T_T}{T_T}}\ (\star\star) \implies \Delta D = -2D\,\frac{\Delta T_T}{T_T} = -2.150.10^6\,\frac{-1}{300} = \underline{10^6\ km}$$

Cl : il faudrait que la Terre s'éloigne d'un million de kilomètres du Soleil pour que la température en surface chute de $1°C$.

• On peut déduire de $(\star\star)$ la température qu'aurait la Terre si elle se trouvait sur l'orbite de Mars (ou de Vénus) en imaginant pour cela que la Terre s'éloigne (ou se rapproche) du Soleil d'une distance ΔD :

$$(\star\star) \implies \boxed{\Delta T_T = -\frac{T_T}{2}\,\frac{\Delta D}{D}} \qquad (\text{avec } T_T = 300\ K \text{ et } D = 150.10^6\ km)$$

À partir de ce modèle, on peut déduire l'ordre de grandeurs des températures de Mars ou de Vénus qui sont des planètes comparables en taille et en constitution à la Terre (planètes telluriques) :

• $\Delta D = D_{\text{Mars}} - D_{\text{Terre}} = +70.10^6\ km$,
soit : $\Delta T_T = T_M - T_T = -70\ K$, et donc $\boxed{T_M = 230\ K \Leftrightarrow t_M = -43°C}$
ce qui est l'ordre de grandeur, les températures sur Mars évoluant entre 0 et $-70°C$.

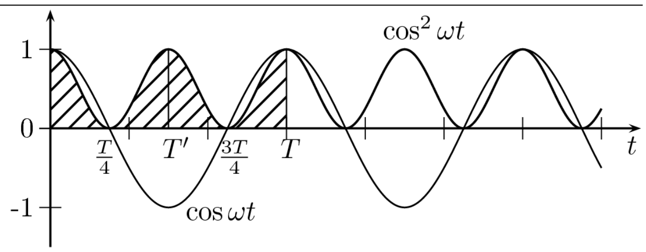
• $\Delta D = D_{\text{Vénus}} - D_{\text{Terre}} = -42.10^6\ km$,
soit : $\Delta T_T = T_V - T_T = +42\ K$, et donc $\boxed{T_V = 342\ K \Leftrightarrow \theta_V = +69°C}$
…ce qui ne correspond pas du tout aux mesures effectuées donnant une température $t_V \sim 480°C$! ceci vient du fait que, sur Vénus, l'« effet de serre » est bien plus important que sur Terre.

2) D étant fixe : $\Delta D = 0$. Alors $(\star) \Rightarrow \boxed{\dfrac{dT_T}{T_T} = \dfrac{dT_S}{T_S}}$.

Supposer $\Delta T_T = +1°C$ (sans autre origine que le Soleil) implique une élévation de la température du Soleil de :

$$\boxed{\Delta T_S = \frac{T_S}{T_T}\,\Delta T_T = +20°C}$$

Solution Ex-1.9



1) $\boxed{\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t)}$.

2) $\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\omega' t)$

avec $\boxed{\frac{2\pi}{T'} \equiv \omega' = 2\omega = \frac{\pi}{T}}$, soit $\boxed{T' = \frac{T}{2}}$

3) • $< \cos(\omega t + \varphi) >\equiv \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega T}\Big[\sin(\omega t + \varphi)\Big]_0^T = 0$

> **Retenir :** Les moyennes temporelles d'un cosinus ou d'un sinus sont nulles :
> $$< \cos(\omega t + \varphi) >=< \sin(\omega t + \varphi) >= 0$$

• Pour calculer la moyenne de $\cos^2(\omega t + \varphi)$, on peut travailler sur sa période T' ou conserver la durée T qui correspond au double (multiple entier, donc) de cette période T' :

$$< \cos^2(\omega t+\varphi) >\equiv \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t+\varphi)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2T}\int_0^T \mathrm{d}t + \frac{1}{2T}\int_0^T \cos(2\omega t)\mathrm{d}t$$

Soit :

$$< \cos^2(\omega t + \varphi) >= \frac{1}{2T}\Big[1\Big]_0^T + \frac{1}{2T}\left[\frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t + \varphi)\right]_0^T = \frac{1}{2}$$

> **Retenir :** La moyenne temporelle d'un cosinus (ou d'un sinus) élevé au carré est égale à $1/2$:
> $$< \cos^2(\omega t + \varphi) >=< \sin^2(\omega t + \varphi) >= \frac{1}{2}$$

Solution Ex-1.10

1) D'après ce qui précède : $\boxed{< i(t) >= 0}$ car $< \cos(\omega t) >= 0$.

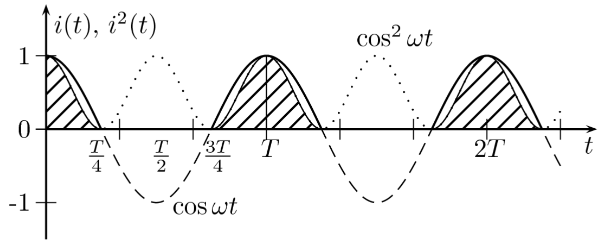
2) La calcul de I_{eff} a été effectué en classe (**IPC1/II.12**) : $I_{eff} = \sqrt{< i^2(t) >} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ pour un régime sinusoïdal. Comme ici, $I_{\max} = I\sqrt{2}$, on en déduit que : $\boxed{I_{\text{eff}} = I}$.

> **Retenir :** En régime sinusoïdal, il est équivalent d'écrire :
> $i(t) = I_{\max}\cos(\omega t + \varphi)$ ou bien $i(t) = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi)$ car $I_{\text{eff}} = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$

3) En utilisant la linéarisation de $\cos a \cos b$, on trouve que $\boxed{< p(t) >=< u(t).i(t) >= UI\cos\varphi}$.

Solution Ex-1.11

1) les signaux $i(t)$ et $i^2(t)$ ont la même période $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$.



2) $i(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in \left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right] \\ I\sqrt{2}\cos\omega t & \text{pour } t \in \left[\frac{3T}{4}, \frac{5T}{4}\right] \end{cases}$

• $< i(t) >= \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{5T}{4}} i(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_{\frac{3T}{4}}^{\frac{5T}{4}} \cos(\omega t)\mathrm{d}t$

On trouve : $\boxed{< i(t) >= \frac{I\sqrt{2}}{\pi} = \frac{I_{\max}}{\pi}}$.

• Sur le même intervalle, on a : $\boxed{< i^2(t) >= \frac{I^2}{2}}$, soit : $\boxed{I_{\text{eff}} = \frac{I}{\sqrt{2}} = \frac{I}{2}}$.