Fiche IPC1
Petites variations et valeurs moyennes

I Fonction scalaire d'une seule variable

■ **Variation (finie)** ΔG d'une grandeur G : $\boxed{\Delta G = G_{\text{final}} - G_{\text{initial}}}$

■ **Dérivée(s)** d'une fonction $f(x)$ au point $x = x_0$:

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}$$

Notation classique (maths)	f'	f''	$\ldots$	$f^{(n)}$	$\ldots$
Notation utile en physique	$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	$\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$	$\ldots$	$\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$	$\ldots$

■ **Interprétation géométrique :** $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $x = x_0$.

■ **Variation élémentaire** $\mathrm{d}f$ d'une fonction f associée à une variation élémentaire $\mathrm{d}x$ de la variable x à partir du point x_0 : $\boxed{\mathrm{d}f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)}$

Attention : Ne jamais confondre en physique une « variation (finie) » avec une « variation élémentaire » :
- une variation $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$ de f entre x_1 et x_2 est *finie* car $x_1 \neq x_2$ (Symbole « Δ »)
- alors qu'une variation *élémentaire* $\mathrm{d}f$ de f associée à une variation élémentaire de la variable x est aussi petite que l'on veut puisque, par définition, $\mathrm{d}x \to 0$ (Symbole « d »)

■ **Différentielle** d'une fonction f de la variable x en $x = x_0$: $\boxed{\mathrm{d}f = f'(x_0).\mathrm{d}x}$

> ♢ **Définition :** On établit que la variation élémentaire $\mathrm{d}f$ de la *physique* s'identifie avec ce qu'on appelle **différentielle** de f en *mathématiques*.
> Alors, la notation « d » représente l'*opérateur* « différentiation (par rapport à la variable donnée) » appliqué à la fonction f.
>
> *Sens physique* — **variation élémentaire de f** au voisinage de x_0 $\leftarrow$ $\mathrm{d}f = f'(x_0).\mathrm{d}x$ $\rightarrow$ *Sens mathématique* — **différentielle de f** au voisinage de x_0

■ **Q :** Comment exprimer la différentielle $\mathrm{d}f$ d'une fonction f de la variable x ?
Il suffit d'exprimer la dérivée de f au point $x = x_0$ et de la multiplier par la différentielle $\mathrm{d}x$ de la variable : $\boxed{\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0).\mathrm{d}x}$ (ne pas oublier le « $\mathrm{d}x$ » !)

■ **Primitive, intégrale et somme :**

> ♢ **Définition :** Lorsque $F(x)$ est *une* **primitive** de $f(x)$:
> - on a $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$, qu' on peut encore écrire : $\mathrm{d}F(x) = f(x).\mathrm{d}x$
> - on appellera « **intégrale** de la fonction f entre x_1 et x_2 » ou encore « **somme** de f entre x_1 et x_2 », le réel I tel que :
>
> $$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x).\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}F(x) = \Big[F(x)\Big]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

II Fonction scalaire de plusieurs variables

Cas d'une fonction $f(x,y,z)$ qui dépend de trois variables x, y et z qui, elles-mêmes, peuvent dépendre d'un paramètre t.

■ **Dérivées partielles :**

$$\boxed{\begin{aligned} f'_x &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z\ \text{fixés}} \\ f'_y &= \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z\ \text{fixés}} \\ f'_z &= \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y,\ \text{fixés}} \end{aligned}}$$

Notation classique (maths)	f'_x	f''_x	f''_{xy}	...	$f_x^{(n)}$	...
Notation utile en physique	$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	...	$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$	...

■ **Dérivée (p/r à t) :**

$$f'(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{f'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}.x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}.y'(t) + \frac{\partial f}{\partial z}.z'(t)}$$

■ **Différentielle :**

$$\boxed{\mathrm{d}f \equiv f'(t).\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}.\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}.\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}.\mathrm{d}z}$$

Variation élémentaire de f entre t et $t + \mathrm{d}t$... associée aux variations élémentaires de x, y et z entre t et $t + \mathrm{d}t$

■ **Différentielle logarithmique :**

Si $f(t) = f[u(t), v(t), w(t)] = K.\frac{u^\alpha v^\beta}{w^\gamma}$ (avec K, α, β et γ des constantes) :

$$\boxed{\mathrm{d}\ln f = \frac{\mathrm{d}f}{f} = \alpha\frac{\mathrm{d}u}{u} + \beta\frac{\mathrm{d}v}{v} - \gamma\frac{\mathrm{d}w}{w}}$$

Retenir : dans une différentielle logarithmique :
- les *produits* se transforment en *sommes*
- les *rapports* se transforment en *différences*
- les *exposants* se transforment en *facteurs multiplicatifs*.