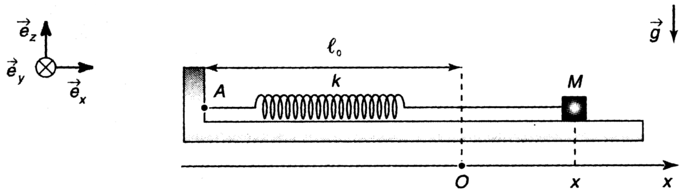
★ ER ★ Óscillateur harmonique amorti

Le référentiel terrestre est supposé galiléen.
Un point matériel M de masse m est lié à un ressort horizontal, l'autre extrémité du ressort étant fixe en A.



Dans son domaine d'élasticité, le ressort non tendu est caractérisé par une constante de raideur k et une longueur à vide l_0.

Le point M glisse le long de l'axe (Ox) à partir de sa position d'équilibre située en O et est repéré sur cet axe par son abscisse x. Il existe entre le mobile et le support un frottement de type visqueux. La force de frottement est de la forme : $\overrightarrow{F_r} = -h\,\dot{x}\,\overrightarrow{e_x}$, où la constante h est positive.

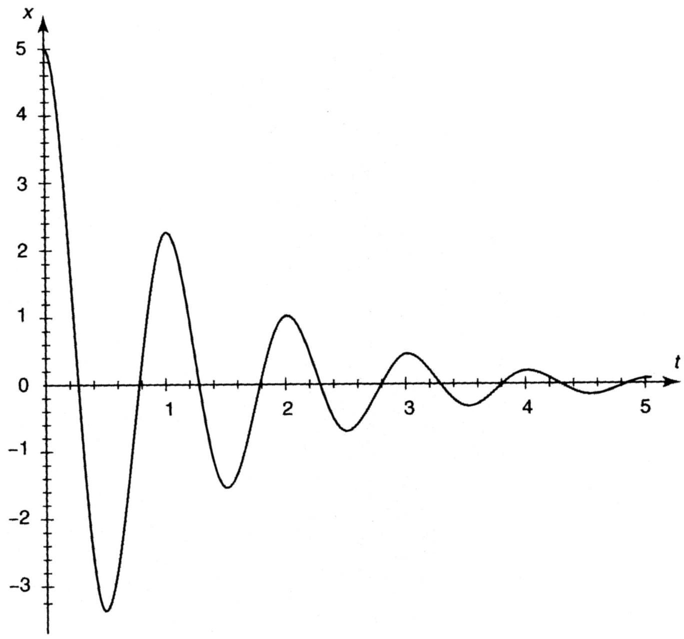
On posera : $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{h}{m}$. L'oscillateur harmonique est caractérisé par le couple (Q, ω_0).

À l'instant $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0 (avec $x_0 \neq 0$).

1) Faire le bilan des forces appliquées au mobile lorsqu'il se trouve en un point d'abscisse x quelconque. Établir l'équation différentielle dont $x(t)$ est solution.

2) Écrire l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de M en fonction de x et de $\dot{x}$. Le système est-il conservatif ? Que vaut $\left(\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t}\right)$? Retrouver l'équation différentielle du mouvement de M.

3) La figure ci-contre représente l'évolution de x au cours du temps (x est exprimé en cm et t en s).
Le mouvement est oscillatoire amorti.



3.a) Quelle condition sur Q, la nature de ce mouvement implique-t-elle ?

3.b) Déterminer la pseudo-pulsation ω associée à ce mouvement en fonction du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0.
En déduire la pseudo-période T des oscillations en fonction de Q et de T_0.

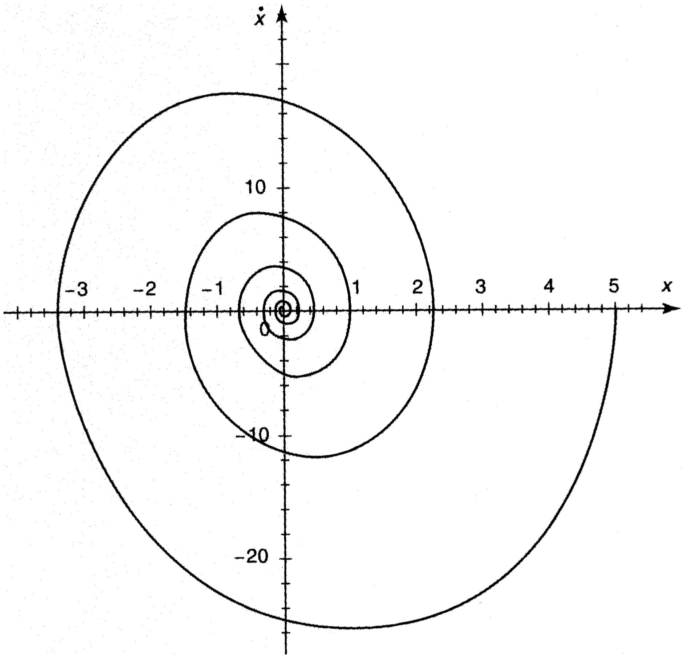
4) Résoudre l'équation différentielle du mouvement en exprimant x en fonction de t, Q, x_0, ω_0 et ω.

5) La décroissance des oscillations est caractérisée par le décrément logarithmique δ défini par la relation : $\delta = \ln\left(\dfrac{x(t)}{x(t+T)}\right)$. Exprimer δ en fonction de Q.

6) La masse m étant de 100 g, exploiter le graphe précédent et déterminer successivement par lecture graphique :

(a) l'élongation initiale x_0 ; (b) la pseudo-période T ; (c) le décrément logarithmique δ.

En déduire :
(d) le facteur de qualité Q ;
(e) la période propre T_0 ;
(f) le cœfficient d'amortissement h ;
(g) la constante de raideur k du ressort.



7) Le portrait de phase de l'oscillateur harmonique amorti est représenté ci-contre dans le plan de phase (O, x, $\dot{x}$). Déterminer successivement par lecture graphique :
(a) la nature du régime de l'oscillateur ;
(b) la vitesse initiale v_0 ;
(c) l'élongation initiale x_0 ;
(d) l'élongation finale x_F ;
(e) le décrément logarithmique δ.
Vos résultats sont-ils en accord avec l'analyse effectuée en **6)** ?

8) En se plaçant dans le cas d'un oscillateur très peu amorti ($Q \gg \frac{1}{2}$), montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m(t)$ du système vérifie par approximation :

$$\frac{\mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t+T)}{\mathcal{E}_m(t)} \simeq \frac{2\,\pi}{Q}$$

(Rque : On rappelle que pour $x \ll 1$: $e^x \simeq 1 + x$)

Solution

1) • Le point matériel M de masse m est étudié dans le référetiel terrestre supposé galiléen. Soumis à son **poids**, à la réaction du support horizontal qui se décompose en une **composante normale de la réaction** $\overrightarrow{R}_N = R_N\,\overrightarrow{e_z}$ et une composante tangentielle qui constitue la **force de frottements** $\overrightarrow{F}_r = -h\dot{x}\,\overrightarrow{e_x}$, ainsi qu'à la **force de rappel du ressort** : $\overrightarrow{T} = -k\,(l-l_0)\,\overrightarrow{e_x} = -kx\,\overrightarrow{e_x}$.

• Le **P.F.D.** donne : $m\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_T} = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{F}_r + \overrightarrow{T}$

• Comme $\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_T} = \ddot{x}\,\overrightarrow{e_x}$,

on en déduit, en projetant dans la base cartésienne : $\left\{\begin{array}{rcl} m\ddot{x} & = & -h\dot{x} - kx \\ 0 & = & -mg + R_N \end{array}\right.$

d'où : $\boxed{\ddot{x} + \dfrac{h}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ $\odot$.

2) • $\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}kx^2}$

• Théorème de l'Énergie mécanique :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = \underbrace{\delta W(\overrightarrow{R}_N)}_{0 \text{ car } \overrightarrow{R}_N \perp \mathrm{d}\overrightarrow{OM}} + \delta W(\overrightarrow{F}_r) = \overrightarrow{F}_r \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -h\dot{x}^2\,\mathrm{d}t < 0$$

→ donc l'énergie mécanique diminue ($\mathcal{E}_m \searrow$) au cours du temps ($\mathrm{d}t > 0$)

→ donc **le système n'est pas conservatif** et on a : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = -h\dot{x}^2 < 0$

Soit : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \dfrac{1}{2}kx^2\right) = m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}x = -h\dot{x}^2$ Ce qui permet de retrouver $\odot$.

3.a) **La solution $x(t)$ de $\odot$ doit être pseudo-sinusoïdale**, donc de la forme

$$x(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\exp(-\alpha t)$$

Pour cela, il faut que l'équation caractéristique de $\odot$ ($r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$) admette un discriminant négatif :

$\Delta = \dfrac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0$, soit **un facteur de qualité** $\boxed{Q > \dfrac{1}{2}}$

3.b) Alors, l'équation caractéristique admet deux racines complexes :

$$\left\{\begin{array}{rclclcl} r_1 & = & -\dfrac{\omega_0}{2Q} - j\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2} & = & -\dfrac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}} & = & -\alpha - j\omega \\ r_2 & = & -\dfrac{\omega_0}{2Q} + j\dfrac{\sqrt{|\Delta|}}{2} & = & -\dfrac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}} & = & -\alpha + j\omega \end{array}\right. \quad \text{avec } \alpha = \dfrac{\omega_0}{2Q}$$

Soit un mouvement de pseudo-pulsation : $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}$ $(\star\star)$

pseudo-période : $\boxed{T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}}$ avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

4) Alors $\left\{\begin{array}{rcl} x(t) & = & (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\exp(-\alpha t) \\ \dot{x}(t) & = & ((B\omega - A\alpha)\cos\omega t - (A\omega + B\alpha)\sin\omega t)\exp(-\alpha t) \end{array}\right.$

Or $\left\{\begin{array}{rcl} x(t=0) & = x_0 & = A \\ \dot{x}(t=0) & = 0 & = B\omega - A\alpha \end{array}\right.$ Soit : $\left\{\begin{array}{rcl} A & = & x_0 \\ B & = & \dfrac{\alpha x_0}{\omega} = \dfrac{\omega_0 x_0}{2\omega Q} \end{array}\right.$

D'où : $\boxed{x(t) = x_0\left(\cos\omega t + \dfrac{\omega_0}{2Q\omega}\sin\omega t\right)\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\right)}$

5) $x(t)$ est tel que $x(t+T) = x_0\left(\cos\omega t + \dfrac{\omega_0}{2Q\omega}\sin\omega t\right)\exp\left(-\dfrac{\omega_0 t}{2Q}\right)\exp\left(-\dfrac{\omega_0 T}{2Q}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Soit : } x(t+T) = x(t)\exp\left(-\dfrac{\omega_0 T}{2Q}\right) \\ \text{d'où : } \delta \equiv \ln\dfrac{x(t)}{x(t+T)} = \ln\left(\exp\left(-\dfrac{\omega_0 T}{2Q}\right)\right) = \dfrac{\omega_0 T}{2Q}\end{array}\right\} \quad \boxed{\delta = \dfrac{\omega_0 T}{2Q} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

6) Graphiquement : $\boxed{x_0 = 5\ cm \qquad T = 1\ s \qquad \delta = \ln\dfrac{x(0)}{x(T)} \cong \ln\dfrac{5}{2,3} = 0,78}$

D'après **5)** , on a :

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{4\pi^2}{\delta^2}} \approx 4,08}$$

D'après ($\star\star$), on a :

$$\boxed{T_0 = T\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \approx 992\ ms}$$

$$\text{Comme} \left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{h}{m} & \boxed{h = m\dfrac{\omega_0}{Q} = m\dfrac{2\pi}{T_0 Q} \approx 0,155\ kg.s^{-1}} \quad (\text{ou } N.m^{-1}.s) \\ \omega_0^2 = \dfrac{k}{m} & \boxed{k = m\omega_0^2 = m\dfrac{4\pi^2}{T_0^2} \approx 4,01\ kg.s^{-2}} \quad (\text{ou } N.m^{-1})\end{array}\right. \quad \text{avec } m = 0,1\ kg.$$

7) d'après le portrait de phase :

$$\left.\begin{array}{ll}\text{a)} & \text{ce régime est pseudo-périodique} \\ \text{b)} & v_0 = \dot{x}_0 = 0\ m.s^{-1} \\ \text{c)} & x_0 = 5\ cm \\ \text{d)} & x_F = 0\ cm \\ \text{e)} & \delta = \ln\dfrac{x(0)}{x(T)} \cong \ln\dfrac{5}{2,25} \approx 0,80 \\ & \delta = \ln\dfrac{x(T)}{x(2T)} \cong \ln\dfrac{2,25}{1} \approx 0,81 \\ & \delta = \ln\dfrac{x(\frac{T}{2})}{x(\frac{3T}{2})} \cong \ln\dfrac{-3,4}{-1,5} \approx 0,81\end{array}\right\} \quad \text{Résultats cohérents avec la question } \textbf{6)}\ .$$

8) $\mathcal{E}_m(t+T) = \mathcal{E}_k(t+T) + \mathcal{E}_p(t+T) = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2(t+T) + \dfrac{1}{2}kx^2(t+T)$

$$\left.\begin{array}{ll}x(t+T) & = x(t)\exp(-\alpha T) \\ \dot{x}(t+T) & = \dot{x}(t)\exp(-\alpha T)\end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \mathcal{E}_m(t+T) = \mathcal{E}_m(t)\exp(-2\alpha T) = \mathcal{E}_m(t)\exp\left(-\frac{\omega_0 T}{Q}\right)$$

avec $T \approx T_0$ car $Q \gg \dfrac{1}{2}$, soit $\omega_0 T \approx 2\pi$, d'où :

$$\boxed{\frac{\mathcal{E}_m(t) - \mathcal{E}_m(t+T)}{\mathcal{E}_m(t)} = 1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{Q}\right) \approx 1 - \left(1 - \frac{2\pi}{Q}\right) = \frac{2\pi}{Q}}$$

ERMéca(3)