★ ER ★ Skieur

On étudie le mouvement d'un skieur M de masse m descendant une piste selon une pente faisant un angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottement $\overrightarrow{F} = -k.\overrightarrow{v}$, où k est un coefficient constant positif et $\overrightarrow{v}$ la vitesse du skieur. La neige exerce sur le skieur, une force de frottement de composante tangentielle $\overrightarrow{T}$ et de composante normale $\overrightarrow{N}$. Les modules de ces composantes sont reliés par la relation $\| \overrightarrow{T} \| = \mu. \| \overrightarrow{N} \|$ où μ est appelé le coefficient de frottement solide.

L'origine de l'axe Ox (axe le long de la la pente orienté dans le sens de la descente) est la position initiale du skieur, supposé partir à l'instant initial avec une vitesse négligeable. On note Oy la normale à la piste dirigée vers le haut. On prendra pour les applications numériques : $k = 5\ u.S.I.$, $\mu = 0,8\ u.S.I.$, $m = 75\ u.S.I.$ et $\cos\alpha = \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1) Déterminer l'unité SI des coefficients k et μ.

2) Faites un schéma et calculer les normes T et N des forces $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$.

3) Établir l'équation différentielle que vérifie la vitesse v. On posera $\tau = \dfrac{m}{k}$.
Montrer que le skieur atteint une vitesse limite $v_l = \dfrac{mg}{k}.(sin\alpha - \mu.\cos\alpha)$ que l'on calculera.

4) Exprimer la vitesse v et la position x du skieur en fonction de t, τ et v_l seulement.

5) Calculer la date t_1 pour la quelle le skieur à une vitesse égale à $\dfrac{v_l}{2}$

6) À la date t_1, le skieur tombe. **On néglige alors** la résistance de l'air et on considère que le coefficient de frottement sur le sol est **multiplié par 2**.
À l'aide du théorème de l'énergie cinétique, calculer la distance D parcourue par le skieur avant de s'arrêter.

Solution

1) $\boxed{u(k) = N.s.m^{-1} = kg.s^{-1}}$ et μ est **sans unité** et **sans dimension**.

2) Schéma similaire à **ExM2.9**. $\boxed{N = mg.\cos\alpha = 520\ N}$ et $\boxed{T = \mu.mg.\cos\alpha = 426\ N}$. Attention $\overrightarrow{T}$ s'oppose au mouvement, donc : $\overrightarrow{T} = -T.\overrightarrow{e_x}$.

3) $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{v}{\tau} = g(\sin\alpha - \mu.\cos\alpha)}$ avec : $\tau = \dfrac{m}{k}$.
Lorsque le skieur atteint la vitesse limite v_l, $v = \text{Cte} = v_l = \tau.g(\sin\alpha - \mu.g\cos\alpha)$
donc : $\boxed{v_l = \dfrac{mg}{k}.(sin\alpha - \mu.\cos\alpha) = 20,8\ m.s^{-1} = 74,8\ km.h^{-1}}$

4) L'équation différentielle linéaire que vérifie v admet pour solution la somme d'une solution particulière et de la solution de l'équation sans second membre. La solution particulière correspond à la vitesse limite. La solution de l'équation sans second membre est de la forme : $v_G = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$. La solution de l'équation est donc $v(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + vl$. Et connaissant la vitesse initiale $v(t=0) = 0$, on en déduit : $\boxed{v(t) = v_l.(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$
La position x s'obtient par intégration de la vitesse par rapport au temps : $x = v_l.(t + \tau.e^{-\frac{t}{\tau}}) + B$.
La constante d'intégration s'obtient avec la condition initiale $x(t=0) = 0$.

Nous obtenons $B = -v_l.\tau$.

Finalement : $\boxed{x(t) = v_l.[t + \tau.(-1 + e^{-\frac{t}{\tau}})]}$

5) $\boxed{t_1 = \tau.\ln 2 = 10,4\ s}$

6) Appliquons le théorème de l'énergie cinétique sur la distance D de freinage qui sépare le point de chute A du point de d'arrêt B :

$$\Delta_{A\to B}\mathcal{E}_k = W(m\overrightarrow{g}) + \cancel{W(\overrightarrow{N})} + W(\overrightarrow{T}) \;\Leftrightarrow\; 0 - \frac{1}{2}m\left(\frac{v_l}{2}\right)^2 = -\Delta\mathcal{E}_{p_g} + \int_{x_A}^{x_B} -2\mu.mg\cos\alpha\overrightarrow{e_x}.\mathrm{d}x\overrightarrow{e_x}$$

Soit : $-\frac{\cancel{m}.v_l^2}{8} = \cancel{m}g.D\sin\alpha - 2\mu.\cancel{m}g\cos\alpha.D \;\Rightarrow\;$ D'où : $\boxed{D = \frac{v_l^2}{8g.(2\mu.\cos\alpha - \sin\alpha)} = 13\ m}$

ERMéca(1)