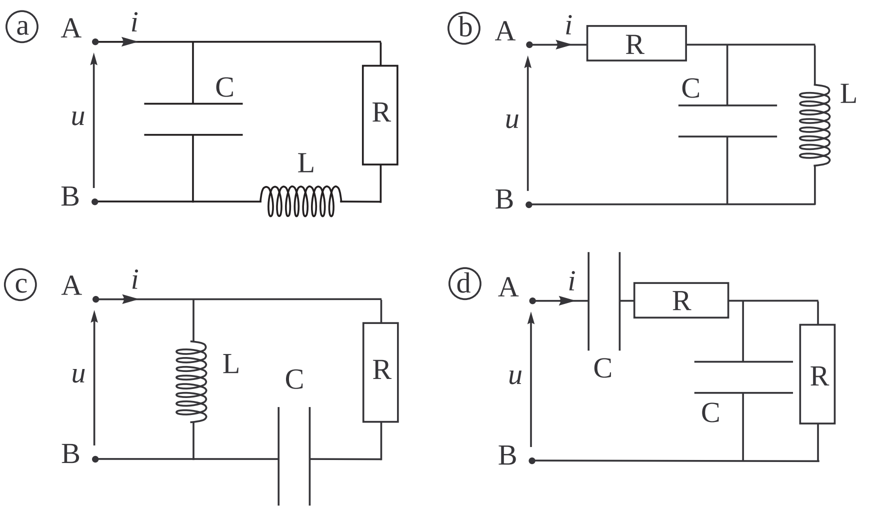
★ ER ★ Associations d'impédances

Déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}$ du réseau dipolaire entre les bornes A et B dans les quatre cas suivants.
En déduire à chaque fois l'impédance réelle Z ainsi que le déphasage de la tension u par rapport au courant i.



Méthode (rappel)

Expression littérale d'un argument :

Soit φ, le déphasage de la tension aux bornes d'un dipôle par rapport au courant qui le traverse en convention récepteur : il s'agit de l'argument de l'impédance complexe de ce dipôle :

$$\underline{Z} = \begin{cases} \dfrac{\underline{u}}{\underline{i}} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{U_m}{I_m}.e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z.e^{j\varphi} = Z.\cos(\varphi) + j.Z.\sin(\varphi) \\ \mathrm{Re}(\underline{Z}) + j\,\mathrm{Im}(\underline{Z}) = a + j.b \end{cases}$$

On en déduit : $\begin{cases} Z.\cos(\varphi) = a \\ Z.\sin(\varphi) = b \end{cases} \Rightarrow \boxed{\cos(\varphi) = \dfrac{a}{Z}}$ et $\boxed{\tan(\varphi) = \dfrac{b}{a}}$

• **Si** $\mathrm{Re}(\underline{Z}) = a > 0$: alors $\cos(\varphi) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

et donc : $\boxed{\varphi = \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)}$

• **Si** $\mathrm{Re}(\underline{Z}) = a < 0$: alors $\cos(\varphi) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in \left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$

et donc : $\boxed{\varphi = \pm\pi + \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)}$

• **Si** $\mathrm{Re}(\underline{Z}) = a = 0$: Deux cas :

- ou bien $b < 0$ alors : $\boxed{\varphi = -\dfrac{\pi}{2}}$

- ou bien $b > 0$ alors : $\boxed{\varphi = \dfrac{\pi}{2}}$

ERÉlec(4)

Solution

a) On établit : $\underline{Z} = \dfrac{R + jL\omega}{jC\omega.\left[R + j.\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)\right]}$

Comme $\arg\left(\dfrac{\underline{u}}{\underline{v}.\underline{w}}\right) = \arg(\underline{u}) - \arg(\underline{v}) - \arg(\underline{w})$, on a :

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi = \arg(\underline{Z}) &= \arg(R + jL\omega) - \arg(jC\omega) - \arg\left[R + j.\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right] \\ &= \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)\end{aligned}}$$

b) On établit : $\underline{Z} = R + \dfrac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} = a + jb$ avec $a > 0$, donc : $\boxed{\varphi = \arctan\left(\dfrac{L\omega}{R.(1 - LC\omega^2)}\right)}$

c) On établit : $\underline{Z} = \dfrac{L}{C}.\dfrac{1 + jRC\omega}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$

Soit :

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi = \arg(\underline{Z}) &= \arg\left(\frac{L}{C}\right) + \arg(1 + jRC\omega) - \arg\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right) \\ &= 0 + \arg(RC\omega) - \arg\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right)\end{aligned}}$$

d) On établit : $\underline{Z} = R.\dfrac{3 + j\left(RC\omega - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}{1 + jRC\omega}$

Soit :

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi = \arg(\underline{Z}) &= \arg(R) + \arg\left[3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)\right] - \arg(1 + jRC\omega) \\ &= 0 + \arctan\left[\frac{1}{3}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)\right] - \arctan(RC\omega)\end{aligned}}$$

Le reste de la correction est en ligne.