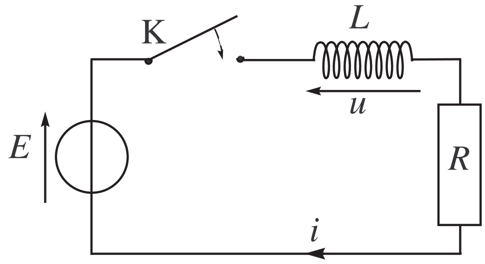
★ ER ★ Circuit RL série en régime transitoire

On considère le circuit ci-contre.
À $t = 0$ on ferme l'interrupteur.

1) Déterminer $i(0^-)$ valeur de l'intensité i juste avant la fermeture.

2) Déterminer $u(0^+)$ valeur de la tension u et $i(0^+)$ valeur de l'intensité i juste après la fermeture.



3) Déterminer $u(\infty)$ valeur de la tension u et $i(\infty)$ valeur de l'intensité i au bout d'un temps très long.

4) On pose $\tau = \dfrac{L}{R}$. Quelle est l'unité der dans le système international ? Démontrer le résultat. Quel est le nom donné à cette constante ?

5) Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.

6) Trouver à partir de cette expression la valeur de $i(t)$ pour un temps très long. Vérifier que cette valeur correspond au comportement du condensateur prévu dans la question **3)**.

7) Tracer l' allure de la courbe représentative de l'intensité $i(t)$ en précisant son asymptote. Calculer la valeur de la pente de la courbe à $t = 0^+$. Tracer la tangente à l'origine et calculer les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'asymptote.

8) Déterminer, en fonction de τ, l'expression du temps t_1, au bout duquel 99% de la charge a été effectuée. On donne : $\ln(10) \simeq 2,3$.

9) Déterminer l' expression de $u(t)$.

10) Établir pour ce circuit le bilan de puissance à l'instant t.

11) Lorsque le régime permanent est établi, exprimer :
- l'énergie magnétique emmagasinée dans la bobine en fonction de L, E et R.
- la puissance dissipée par effet Joule en fonction de E et R.

12) Lorsque le régime permanent est établi, que devient l'énergie électrique fournie au circuit par le générateur ?

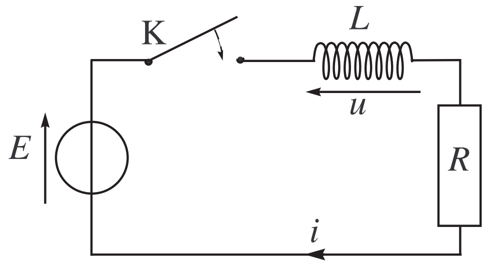
Solution

1) L'interrupteur étant ouvert à $t = 0^-$: $\boxed{i(0^-) = 0}$

2) L'intensité traversant une bobine étant une fonction continue du temps : $\boxed{i(0^-) = i(0^+) = 0}$
La loi des mailles à $t = 0^+$:

$$E - R.i(0^+) - u(0^+) = 0$$

donne : $\boxed{u(0^+) = E}$



3) En régime permanent continu, la bobine se comporte comme un fil, donc : $\boxed{u(\infty) = 0}$

La loi des mailles donne : $E - R.i(\infty) - \cancel{u(\infty)} = 0$, soit : $\boxed{i(\infty) = I_0 = \frac{E}{R}}$

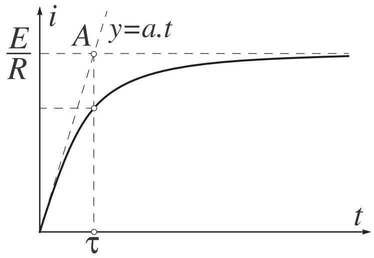
4) Puisque $\tau = \frac{L}{R}$: $[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{\cancel{[I]}}{\cancel{[U]}} \times \cancel{[U]}.\frac{[\mathrm{d}t]}{\cancel{[\mathrm{d}I]}} = [\mathrm{d}t] = T$
τ est homogène à un temps : τ **s'exprime en secondes** dans le système S.I.
On l'appelle **constante de temps** ou **durée caractéristique** du circuit RL.

5) La loi des maille conduit à $\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}}$ avec $\boxed{\tau = \frac{L}{R}}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Solution : } i = i_P + i_G = I_0 + A.\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\ \text{Comme } i(0^+) = 0 \text{ on a : } I_0 + A = 0, \text{ soit : } A = -I_0 \end{array}\right\} \rightarrow \textbf{CI :} \quad \boxed{i(t) = I_0.\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

6) Lorsque $t \to +\infty$, la relation précédente permet de vérifier que : $\boxed{i(\infty) = \frac{E}{R}}$

7) Équation de la tangente à l'origine : $y = a.t$ avec $a = \left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)(0) = \frac{E}{L}$.



$$y(t) = I_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{E}{L}.t = \frac{E}{R} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{L}{R} = \tau$$

La tangente coupe l'asymptote en $\boxed{A\left(\tau, I_0\right)}$

8) $i(t_1) = \frac{99}{100}.I_0 \quad \Leftrightarrow \quad \cancel{I_0}.(1 - \exp(-\frac{t_1}{\tau})) = \frac{99}{100}.\cancel{I_0} \quad \Leftrightarrow \quad \exp(-\frac{t_1}{\tau}) = \frac{1}{100}$
Soit : $\boxed{t_1 = 2\tau.\ln(10) \simeq 4,6.\tau}$

9) $\boxed{u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E.\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$.

10) La loi des mailles multipliée par i donne :

$$E.i = Ri^2 + \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}{\mathrm{d}t} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_J + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t}} \ (\star)$$

11) En régime permanent : $i = i(\infty) = I_0 = \frac{E}{R}$:

$$\boxed{\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}.L.\frac{E^2}{R^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_J = R.I_0^2 = \frac{E^2}{R}}$$

12) Puisque $\mathcal{E}_L =$ Cte en régime permanent continu, le bilan de puissance $(\star)$ conduit à :

$$\boxed{\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_J = \frac{E^2}{R}}$$

CI : L'énergie électrique fournie par le circuit est entièrement dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique.