Sujet A

Toutes les réponses devront être justifiées de manière succincte et précise.

1) La tension u d'un circuit d'ordre 2 est régie par l'équation différentielle canonique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = K \quad \text{avec} K = \mathsf{Cte}$$

On suppose $Q > \frac{1}{2}$. Donner l'expression littérale de $u(t)$ en fonction de K, de deux paramètres ω et τ dont on donnera l'expression en fonction de ω_0 et Q et de deux constantes d'intégration A et B.

---

2) Une tension $s(t)$ satisfait l'équation différentielle suivante : $\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \frac{s}{\tau^2} = 0$
Quelle est l'équation caractéristique associée ?

En déduire son discriminant Δ — puis ses racines r_1 et r_2 en fonction de τ et de $\lambda = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$.

3) En déduire la nature du régime libre et l'expression littérale de $s(t)$ en fonction de deux constantes d'intégration A et B et du paramètre τ.

4) Les conditions initiales permettent d'écrire : $s(0^+) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{E}{\tau}$.
En déduire A et B en fonction de E seulement.

Sujet B

Toutes les réponses devront être justifiées de manière succincte et précise.

1) L'intensité i d'un circuit d'ordre 2 est régie par l'équation différentielle canonique suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i = 0$$

On suppose $Q < \frac{1}{2}$. Donner l'expression littérale de $i(t)$ en fonction de deux paramètres r_1 et r_2 dont on donnera l'expression en fonction de ω_0 et Q et de deux constantes d'intégration A et B.

---

2) La tension u d'un circuit vérifie l'équation différentielle : $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \omega_0^2\frac{Q_1}{2C}$
→ Quelle est l'équation caractéristique associée ?
→ En déduire son discriminant Δ.
On suppose le régime libre pseudo-périodique.
→ Exprimer les racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique en fonction de γ et de ω_0.
Pour la suite, on pose $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$.

3) En déduire l'expression littérale de $u(t)$ en fonction de deux constantes d'intégration A et B, des paramètre γ, ω, Q_1 et C.

4) Les conditions initiales permettent d'écrire : $u(0^+) = \frac{Q_1}{C}$ et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$.
En déduire A et B en fonction des paramètres Q_1, C, γ et ω.

Sujet A

1) $Q > \dfrac{1}{2}$: Le régime libre est pseudopériodique. Il ne faut pas oublier d'ajouter au régime libre (u_G, solution générale de l'équation différentielle avec second membre) la solution particulière de l'équation différentielle avec second membre (u_P), qui est constante puisque le second membre est constant :

$$\boxed{u(t) = u_G(t) + u_P = (A.\cos(\omega t) + B.\sin(\omega t)).\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{K}{\omega_0^2} \quad \text{avec} \begin{cases} \omega = \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1} \\ \tau = \dfrac{2Q}{\omega_0} \end{cases}}$$

2) Équation différentielle suivante : $\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{3}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \dfrac{s}{\tau^2} = 0$

Équation caractéristique associée : $\boxed{r^2 + \dfrac{3}{\tau}r + \dfrac{1}{\tau^2} = 0}$

De discriminant $\Delta = \left(\dfrac{3}{\tau}\right)^2 - 4\dfrac{1}{\tau^2}$

$\rightarrow \boxed{\Delta = \dfrac{5}{\tau^2} > 0}$

$\rightarrow$ Deux racines réelles $r_{1/2} = \dfrac{-\dfrac{3}{\tau} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

soit : $\boxed{r_{1/2} = -\dfrac{3}{2\tau} \pm \lambda}$ avec $\boxed{\lambda = \dfrac{\sqrt{5}}{2\tau}}$

3) Régime libre apériodique : $\boxed{s(t) = A.\exp\left[\left(-\dfrac{3}{2\tau} + \lambda\right)t\right] + B.\exp\left[\left(-\dfrac{3}{2\tau} - \lambda\right)t\right]}$

4) Les conditions initiales permettent d'écrire :

$$\begin{cases} s(0^+) = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0^+) = \dfrac{E}{\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ \left(-\dfrac{3}{2\tau} + \lambda\right).A + \left(-\dfrac{3}{2\tau} - \lambda\right).B = \dfrac{E}{\tau} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ B = -\dfrac{1}{2\lambda}\dfrac{E}{\tau} \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{A = \dfrac{E}{\sqrt{5}}} \quad \boxed{B = -\dfrac{E}{\sqrt{5}}}$

Sujet B

1) $Q < \dfrac{1}{2}$: Le régime libre est apériodique :

$$\boxed{i(t) = A.\exp(r_1 t) + B.\exp(r_2 t) \text{ avec } \begin{cases} r_1 = -\dfrac{\omega_0}{2Q} + \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2} \\ r_2 = -\dfrac{\omega_0}{2Q} - \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2} \end{cases}}$$

2) Équation différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = \omega_0^2\dfrac{Q_1}{2C}$

Équation caractéristique associée : $\boxed{r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0}$

De discriminant : $\Delta = 4(\gamma^2 - \omega_0^2) < 0$ pour un régime libre pseudo-périodique.

Les racines de l'équation caractéristiques s'écrivent donc :

$$r_{1/2} = \frac{-2\gamma \pm 2j\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}{2}$$

soit : $\boxed{r_{1/2} = -\gamma \pm j\omega}$ avec $\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma}}$.

3) Alors : $\boxed{u(t) = u_G + u_P = (A.\cos(\omega t) + B.\sin(\omega t)).e^{-\gamma t} + \dfrac{Q_1}{2C}}$

4) Les conditions initiales permettent d'écrire :

$$\begin{cases} u(0^+) = \dfrac{Q_1}{C} \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + \dfrac{Q_1}{2C} = \dfrac{Q_1}{C} \\ -\gamma.A + \omega.B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{Q_1}{2C} \\ B = \dfrac{\gamma}{\omega}A \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{A = \dfrac{Q_1}{2C}}$ $\boxed{B = \dfrac{\gamma}{\omega}.\dfrac{Q_1}{2C}}$