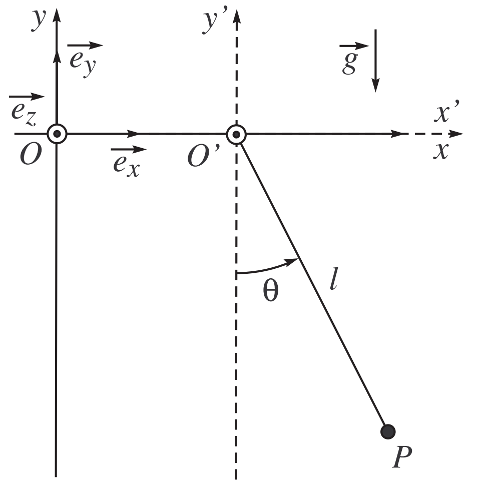
Devoir Surveillé n°7

Consigne de rédaction :
- chaque réponse doit être précédée du **raisonnement** qui la justifie.
- les résultats devront être encadrés **à la règle**
- les applications numériques devront être effectuées avec soin : en particulier :
→ il sera judicieux de conserver à la calculatrice tous les calculs intermédiaires pour effectuer les calculs ultérieurs ;
→ donner un nombre **acceptable** de chiffres significatifs ;
→ les applications numériques sans **unités** seront considérées fausses.

Partie A : Mécanique

I Pendule [ENAC 2007 (q. 1-6)]



On désigne par$\mathcal{R}'$ $(0'x'y'z')$ un repère d'origine O' dont les axes orthogonaux $O'x'$, $O'y'$ et $O'z'$ sont respectivement parallèles aux axes Ox, Oy et Oz d'un repère $\mathcal{R}\,(Oxyz)$ que l'on supposera galiléen. Un pendule simple est constitué d'un point matériel P de masse m, suspendu à l'origine O' de $\mathcal{R}'$ par un fil sans masse ni raideur et de longueur l. On note θ l'angle que fait le fil, que l'on supposera constamment tendu, avec la verticale Oy de $\mathcal{R}$ (cf. figure ci-contre). Dans un premier temps, l'origine O' de $\mathcal{R}'$ reste fixe et confondue avec l'origine O de $\mathcal{R}$.

1) Quelle doit être la longueur l du fil pour que la période des petits mouvements du pendule soit $T_0 = 1\ s$. On prendra pour norme de l'accélération de la pesanteur $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{e_y}$, la valeur $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

A) $l = 1,141\ m$ B) $l = 0,714\ m$ C) $l = 1,312\ m$ D) $l = 0,248\ m$

2) Le repère $\mathcal{R}'$ est maintenant animé d'un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré d'accélération constante $\overrightarrow{a} = a\,\overrightarrow{e_x}$.
Calculer le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ie}})$ par rapport au point O' de la force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{F_{ie}}$ qui s'applique au point P dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

A) $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ie}}) = -mla\cos\theta\,\overrightarrow{e_z}$
B) $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ie}}) = mla(\cos\theta - \sin\theta)\,\overrightarrow{e_z}$
C) $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ie}}) = -mla(\cos\theta + \sin\theta)\,\overrightarrow{e_x}$
D) $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ie}}) = -mla\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$

3) Calculer le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ic}})$ par rapport au point O' de la force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{F_{ic}}$ qui s'applique au point P dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

A) $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ic}}) = -ml^2 a\,\overrightarrow{e_z}$
B) $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ic}}) = ml^2\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\,\overrightarrow{e_x}$
C) $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ic}}) = -ml\cos\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{e_z}$
D) $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ic}}) = \overrightarrow{0}$

4) Déduire du théorème du moment cinétique appliqué en O' dans $\mathcal{R}'$ au point matériel P l'équation différentielle à laquelle obéit l'angle θ.

A) $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{g}{l}\cos\theta + \dfrac{a}{l}\sin\theta$ B) $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{a}{l}\cos\theta + \dfrac{g}{l}\sin\theta$

C) $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{a}{l}\sin\theta + \dfrac{g}{l}\cos\theta$ D) $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta - \dfrac{a}{l}\cos\theta$

5) Déterminer la valeur θ_0 de l'angle θ correspondant à la position d'équilibre du pendule.

A) $\theta_0 = -\arctan\dfrac{a}{g}$ B) $\theta_0 = \arctan\dfrac{a}{g}$ C) $\theta_0 = \arctan\dfrac{g}{a}$ D) $\theta_0 = -\arctan\dfrac{g}{a}$

6) Exprimer la période T des petits mouvements autour de la position d'équilibre θ_0 en fonction de l, a et g.

A) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{la}{a^2+g^2}}$ B) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{a^2+g^2}}}$

C) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{lg}{a^2+g^2}}$ D) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{a+g}}$

Partie B : Thermodynamique

II Température et pression dans la troposhère [ENSTIM 2007]

Pour la troposphère, située entre les altitudes 0 et 11 km au-dessus de la Terre, la température est une fonction affine de l'altitude. Elle suit donc la relation suivante :

$$T(z) = az - b$$

avec z l'altitude en kilomètres, T la température en kelvin, a et b des constantes.

1) Sachant qu'au niveau du sol la température est de $15°C$ et de $-50°C$ à une altitude de 10 km, déterminer les coefficients a et b en précisant leur unité.

2) En assimilant l'air à un gaz parfait de masse volumique $\mu(z)$ et de masse molaire M_{air}, exprimer la masse volumique en fonction de M_{air}, R (constante des gaz parfaits), z, a, b et $P(z)$ (pression à l'altitude z).

3) En supposant le fluide en équilibre dans le référentiel terrestre, appliquer le principe de la statique des fluides puis déterminer la pression en un point de la troposphère en fonction de z, a, b, M_{air}, R, g l'accélération de la pesanteur et de $P(0)$ la pression au niveau du sol.

4) Application numérique : calculer $P(z_1)$ pour $z_1 = 10\ km$,
sachant que $P(0) = 1\ bar$, $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$ et $R = 8{,}31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$.

Partie C : Chimie

III Dosage des ions chlorure par précipitation [ENSTIM 2009]

■ Pour s'assurer que le dosage des ions $Cl^-_{(\mathsf{aq})}$ par les ions $Ag^+_{(\mathsf{aq})}$ est possible, on réalise au préalable la manipulation suivante.
On effectue le dosage de $V_1 = 100\ mL$ d'une solution $\mathcal{S}_1$ placée dans le bécher, de chlorure de sodium (Na^+, Cl^-) de concentration $C_1 = 10^{-2}\ mol.L^{-1}$ par une solution $\mathcal{S}_2$ de nitrate d'argent (Ag^+, NO_3^-) placée dans la burette, de concentration $C_2 = 8.10^{-2}\ mol.L^{-1}$.
Le produit de solubilité du chlorure d'argent $AgCl_{(\mathsf{s})}$ est : $K_{s_1} = 10^{-10}$.

1) Écrire la réaction de dosage (réaction (1)).
Exprimer la constante d'équilibre K_{s_1} en fonction des concentrations.
Exprimer la constante K_1 de la réaction (1) en fonction de K_{s_1}.

2) Sachant que le volume d'une goutte est $v = 0,05\ mL$, calculer le quotient de la réaction de solubilisation d'$AgCl_{(\mathsf{s})}$ lorsque la première goutte de la solution $\mathcal{S}_2$ est versée par la burette dans le bécher.
En déduire que la précipitation débute dès la première goutte.

3) Calculer le volume $V_{2\mathsf{e}}$ de la solution de nitrate d'argent versé à l'équivalence.

■ On a ajouté dans le bécher, en guise d'indicateur coloré, $V_3 = 2\ mL$ d'une solution de chromate de potassium K_2CrO_4 ($2K^+$, CrO_4^{2-}) de concentration $C_3 = 1\ mol.L^-$, susceptible de donner le précipité $Ag_2CrO_{4(\mathsf{s})}$, de couleur rouge, dont le produit de solubilité est $K_{s_2} = 10^{-11,8}$.

4) Écrire la réaction de précipitation de $Ag_2CrO_{4(\mathsf{s})}$ (réaction (2)).
Exprimer la constante d'équilibre K_{s_2} en fonction des concentrations.

5) En prenant $[Cl^-]_f = [CrO_4^{2-}]_f = 10^{-2}\ mol.L^{-1}$ pour déterminer les valeurs frontières, représenter sur un même axe gradué en $pAg = -\log[Ag^+]$ les domaines d'existence des précipités $AgCl_{(\mathsf{s})}$ et $AgCrO_{4(\mathsf{s})}$ et les domaines de prédominance des espèces solubles Cl^- et CrO_4^{2-}.
En déduire que $AgCl_{(\mathsf{s})}$ précipite avant $Ag_2CrO_{4(\mathsf{s})}$.

6) Quelle est la concentration en ions Ag^+ dans le bécher quand $Ag_2CrO_{4(\mathsf{s})}$ commence à précipiter ? (On considérera que le volume versé V_2 est alors quasiment celui à l'équivalence).
En déduire la concentration des ions Cl^- alors présents en solution.
En déduire que pratiquement tous les ions Cl^- ont réagi.