Correction DS n°7

Partie A : Mécanique

I Pendule [ENAC 2007 (q. 1 à 6)]

1) La pulsation propre d'un pendule simple est $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}} = \dfrac{2\pi}{T_0}$.

D'où : $\boxed{l = g\dfrac{T_0^2}{4\pi^2} = 0,248\ m}$ **Rép. 1.D**

2) Le référentiel $\mathcal{R}'$ est non galiléen car en translation rectiligne **non** uniforme par rapport à $\mathcal{R}$ galiléen. P est alors soumis, dans $\mathcal{R}'$ à :
- son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{e_y}$
- la tension du fil : $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{e_r} = -T\overrightarrow{e_{O'\to P}}$
- la force d'inertie d'entraînement : $\overrightarrow{F_{ie}} = -m\overrightarrow{a_e}(P) = -m\overrightarrow{a_{P^*/\mathcal{R}'}} = -m\overrightarrow{a_{O'/\mathcal{R}'}} = -ma\overrightarrow{e_x}$
- la force d'inertie de Coriolis : $\overrightarrow{F_{ic}} = -m\overrightarrow{a_C}(P) = -m\cancel{\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}} \times \overrightarrow{v_{P/\mathcal{R}'}} = \overrightarrow{0}$ car $\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ie}}) = \overrightarrow{O'P} \times \overrightarrow{F_{ie}} = \left|\begin{array}{l} l\sin\theta \\ -l\cos\theta \\ 0 \end{array}\right._{(\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})} \times \left|\begin{array}{l} -ma \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \quad \text{soit : } \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ie}}) = -mla\cos\theta\,\overrightarrow{e_z}}$$ **Rép. 2.A**

3) Puisque $\overrightarrow{F_{ic}} = \overrightarrow{0}$, $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ic}}) = \overrightarrow{0}}$ **Rép. 3.D**.

4) Le Théorème du moment cinétique appliqué en O' dans $\mathcal{R}'$ au point P s'écrit :

$$\textbf{(TMC)} \quad \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{O'/\mathcal{R}'}}(P)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}'} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{T}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ie}}) + \cancel{\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F_{ic}})}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{O'P} \times \overrightarrow{P} = (l\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} - l\cos\theta\,\overrightarrow{e_y}) \times (-mg\,\overrightarrow{e_y}) = -mgl\sin\theta\,\overrightarrow{e_z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{O'P} \times \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0} \quad \text{car} \quad \overrightarrow{O'P} // \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{L_{O'/\mathcal{R}'}}(P) = \overrightarrow{O'P} \times m\overrightarrow{v_{P/\mathcal{R}'}} = l\overrightarrow{e_r} \times l\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} = ml^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z} \end{cases}$$

Alors, **(TCM)** donne, en projection selon $\overrightarrow{e_z}$: $ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta - mla\cos\theta$,

soit : $\boxed{\ddot{\theta} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta - \dfrac{a}{l}\cos\theta}$ **Rép. 4.D**.

5) À l'équilibre relatif dans $\mathcal{R}'$, on a $\theta = \theta_0 = \text{Cte}$, soit : $\ddot{\theta} = 0$ et donc, d'après **4)** :

$(\star)$ $g\sin\theta_0 = -a\cos\theta_0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\theta_0 = -\arctan\dfrac{a}{g}}$ **Rép. 5.A**.

6)

$$\left.\begin{array}{l} \theta = \theta_0 + \epsilon \\ \ddot{\theta} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta - \dfrac{a}{l}\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \ddot{\epsilon} + \frac{1}{l}(-a\sin\theta_0\sin\epsilon \underbrace{+a\cos\theta_0\cos\epsilon + g\sin\theta_0\cos\epsilon}_{=0\ (\text{d'après } (\star))} + g\cos\theta_0\sin\epsilon) = 0$$

D'où l'équation du mouvement des petites oscillations ($\sin\epsilon \simeq \epsilon$ et $\cos\epsilon \simeq 1$) autour de la position d'équilibre θ_0 :

$$\ddot{\epsilon} + \frac{g\cos\theta_0 - a\sin\theta_0}{l}\epsilon = 0 \quad \text{où} \begin{cases} \cos\theta_0 = \dfrac{mg}{\sqrt{P^2 + F_{ie}^2}} = \dfrac{g}{\sqrt{g^2+a^2}} \\ \sin\theta_0 = \dfrac{-ma}{\sqrt{P^2 + F_{ie}^2}} = \dfrac{-a}{\sqrt{g^2+a^2}} \end{cases} \Rightarrow \ddot{\epsilon} + \frac{\sqrt{g^2+a^2}}{l}\epsilon = 0$$

Soit : $\ddot{\epsilon} + \omega_1^2\epsilon = 0$ avec $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{g^2+a^2}}{l}} = \dfrac{2\pi}{T} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}}$ **Rép. 6.B**.

Partie B : Thermodynamique

II Température et pression dans la troposhère [ENSTIM 2007]

1) $T(z_1) = a.z_1 - b$ et $T(0) = -b$, d'où

$$\boxed{a = \frac{T(z_1) - T(0)}{z_1} = -6,5.10^{-3}\ K.m^{-1} = -6,5\ K.km^{-1}} \text{ et } \boxed{b = T(0) = -288\ K}.$$

2) L'équation d'état pour une particule de fluide en équilibre thermodynamique à l'altitude z est : $P(z)\mathrm{d}V = \mathrm{d}n.RT(z) \Leftrightarrow P(z) = \dfrac{\mathrm{d}m}{M_{air}\mathrm{d}V}.RT(z)$,

d'où $\boxed{\mu(z) = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \dfrac{M_{air}P(z)}{RT(z)} = \dfrac{M_{air}P(z)}{R.(az-b)}}$

3) Pour une particule de fluide en équilibre dans le référentiel terrestre à l'altitude z (axe Oz **ascendant**), la relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\mu(z)g$$

, où g est l'intensité du champ de pesanteur terrestre. Grâce à la question **2)** , cette RFSF devient :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\frac{M_{air}g.P(z)}{R.(az-b)}$$

Soit :

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M_{air}g}{R}\frac{\mathrm{d}z}{az-b} \Leftrightarrow \int_{P(0)}^{P(z)}\frac{\mathrm{d}P}{P} = -\frac{M_{air}g}{R}\int_0^z\frac{\mathrm{d}z}{az-b} \Leftrightarrow \ln\frac{P(z)}{P(0)} = -\frac{M_{air}g}{a.R}\ln\left(\frac{az-b}{-b}\right)$$

$$\hookrightarrow \boxed{P(z) = P(0)\left(\frac{az-b}{-b}\right)^{-\frac{M_{air}g}{a.R}}}$$

4) Application numérique pour $z_1 = 10\ km$: $\boxed{P(z_1) = 0,26\ bar}$.

Partie C : Chimie

III Dosage des ions chlorure par précipitation [ENSTIM 2009]

1) $\boxed{Ag^+_{(aq)} + Cl^-_{(aq)} \rightleftarrows AgCl_{(s)}}$ de constante $K_1 = \dfrac{1}{K_{s_1}}$ avec $\boxed{K_{s_1} = [Ag^+].[Cl^-] = 10^{-10}}$

2) Le quotient de la réaction de solubilisation est :

$$\boxed{Q_{r_1} = [Ag^+]_0.[Cl^-]_0 = \frac{C_2.v}{V_1+v}.\frac{C_1.V_1}{V_1+v} \simeq 4.10^{-7}}$$

Comme $\boxed{Q_{r_1} > K_{s_1}}$ on en déduit qu'il y a précipitation dès la première goutte de chlorure de sodium ajoutée.

3) La réaction de dosage est quantitative ($K_1 = 10^{10} \gg 10^4 \gg 1$). À l'équivalence, tous les ions Cl^- ont été consommés par les ions Ag^+ introduits par la burette :

$$n(Ag^+)_{\text{versés}} = n(Cl^-)_{\text{bécher}} \quad \Leftrightarrow \quad C_2.V_{2e} = C_1.V_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{2e} = \frac{C_1V_1}{C_2} = 12,5\ mL}$$

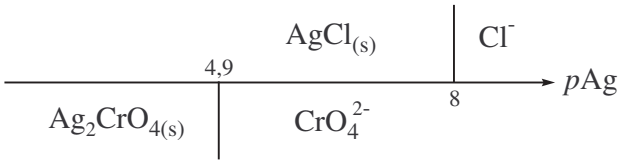
4) $\boxed{2Ag^+_{(aq)} + CrO_4^{2-} \rightleftarrows Ag_2CrO_{4(s)}}$; $K_2 = \dfrac{1}{K_{s_2}}$ avec $\boxed{K_{s_2} = [Ag^+]^2.[CrO_4^{2-}] = 10^{-11,8}}$

5) • Il y a précipitation de $AgCl_{(s)}$ lorsque :

$Q_{r_1} > K_{s_1} \Leftrightarrow [Ag^+].[Cl^-]_f > K_{s_1} \Leftrightarrow pAg < pK_{s_1} - pCl_f \Leftrightarrow \boxed{pAg < 8}$

• Il y a précipitation de $AgCrO_{4(s)}$ lorsque :

$Q_{r_2} > K_{s_2} \Leftrightarrow [Ag^+]^2.[CrO_4^{2-}]_f > K_{s_2} \Leftrightarrow pAg < \dfrac{1}{2}.(pK_{s_2} - pCrO_{4_f}) \Leftrightarrow \boxed{pAg < 4,9}$



Csqce : Les domaines de prédominance étant très disjoints ($\Delta pAg \geq 3$), $AgCl_{(s)}$ précipite avant $Ag_2CrO_{4(s)}$.

6) • Au début de la précipitation de $Ag_2CrO_{4(s)}$, en supposant $V_2 = V_{2(e)}$:

$$\boxed{[Ag^+] = \sqrt{\frac{K_{s_2}}{[CrO_4^{2-}]}} = \sqrt{\frac{K_{s_2}}{\dfrac{C_3.V_3}{V_1+V_{2e}+V_3}}} \simeq 9,5.10^{-6}\ mol.L^{-1}}$$

• Comme $AgCl_{(s)}$ est présent en solution, K_{s_1} fournit : $\boxed{[Cl^-] = \dfrac{K_{s_1}}{[Ag^+]} \simeq 1,05.10^{-5}\ mol.L^{-1}}$

• On en déduit que lorsque $Ag_2CrO_{4(s)}$ commence de précipiter,

$$n(Cl^-) = [Cl^-].(V_1 +_2 +V_3) \simeq 1,2.10^{-6}\ mol \ll n(Cl^-)_0 = 10^{-3}\ mol$$

Cl : On peut donc considérer que pratiquement tous les ions Cl^- ont réagi.