

# Correction DS n°6

## Partie A : Mécanique

### I La fusée lunaire d'Hergé

La **vitesse de libération** étant la vitesse minimale pour qu'un point matériel de masse  $m$  à la distance  $r$  d'un astre de masse  $m_a$  échappe à l'attraction gravitationnelle de celui-ci, elle correspond à la **vitesse qui annule son énergie mécanique** à la distance  $r$  de l'astre dans le référentiel « astro-centrique » — car alors la trajectoire de  $M$  devient **parabolique**, trajectoire correspondant à l'énergie mécanique minimale d'un **état de diffusion**.

Ainsi, pour un corps à proximité de la Terre, son énergie mécanique s'annule lorsque :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{\mathcal{G}m \cdot m_a}{r} = 0 \Leftrightarrow v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_a}{r}}$$

Pour un point à la surface de la terre,  $r = R_T$  et on vérifie la valeur  $v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_T}{R_T}} \approx 11,2 \text{ km.s}^{-1}$ .

Dans le cas d'*Objectif Lune*, la fusée est l'altitude  $h = 3185 \text{ km}$  d'altitude.

En ce point  $M$ ,  $r = R_T + h$  et la vitesse de libération correspondante est :

$$v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_T}{R_T + h}} \simeq 9,122 \text{ km.s}^{-1} \rightarrow \text{Les calculs des ingénieurs de Tintin sont donc corrects.}$$

L'écart entre la valeur calculée et celle du texte vient de ce que le rayon de la Terre utilisé par Hergé est le rayon équatorial  $R_T = 6378 \text{ km}$  dont  $6400 \text{ km}$  n'est que la valeur approchée.

### II Satellite [ENAC 2008 q. 13 à 18)]

1) L'application du théorème du moment cinétique au satellite en  $T$  dans  $\mathcal{R}_G$  montre que le moment cinétique du satellite  $\overrightarrow{L}_{T/\mathcal{R}_G}(S) = \overrightarrow{TS} \times m\overrightarrow{v}_{S/\mathcal{R}_G}$  est une constante du mouvement toujours orthogonale au vecteur position  $\overrightarrow{TS}$ .

Donc, la trajectoire de  $S$  dans  $\mathcal{R}_G$  est plane et contient le centre  $T$  de la Terre. **Rép : 1.A)**

2) Le système  $\mathcal{S} = \{S, m\}$  est soumis à la seule force gravitationnelle de la Terre dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_G$ . Cette force étant conservative, dérivant de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p = -\mathcal{G}\frac{mM}{r}$  (avec  $r = TS$ ), son énergie mécanique est une constante du mouvement — puisque le théorème de l' $\mathcal{E}_m$  donne  $d\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = 0$  soit  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_k = \text{Cte}$ .

Sur une trajectoire circulaire de rayon  $r_0 = R + h$ ,  $\mathcal{E}_p$  est une constante,

donc  $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv_0^2$  est une constante.

Ainsi, la vitesse du satellite sur une trajectoire circulaire est constante (mouvement circulaire uniforme). Le **P.F.D.** appliqué dans  $\mathcal{R}_G$  donne :

$$m\overrightarrow{a}_{S/\mathcal{R}_G} = \overrightarrow{F}_{T \rightarrow S} \Leftrightarrow -m\frac{v^2}{r_0} = -\mathcal{G}\frac{mM}{r_0^2} \overrightarrow{e}_r \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{M\mathcal{G}}{R+h}} \quad \text{Rép : 2.C)}$$

3) Une trajectoire circulaire de rayon  $r_0 = R + h$  uniformément parcourue à la vitesse  $v_0$  est

décrite en une durée  $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0}$ , soit :  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{M\mathcal{G}}}$  **Rép : 3.D)**

4) Puisque  $\mathcal{E}_{m,t} = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_k = -\mathcal{G} \frac{mM}{r_0} + \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mathcal{G} \frac{mM}{R+h} + \frac{1}{2}m \frac{MG}{R+h} = \frac{\mathcal{E}_p}{2}$ , on a :

$$\mathcal{E}_{m,t} = -\frac{mMG}{2(R+h)} \quad \text{Rép : 4.B)}$$

5) Dans le référentiel géocentrique, la vitesse du satellite à la surface de la terre est due à sa rotation soit autour de l'axe des pôles :  $v = R \cos \lambda \cdot \Omega$ . D'où :

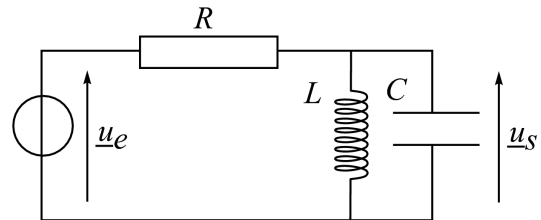
$$\mathcal{E}_{m,s} = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_k = -\frac{mMG}{R} + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 \cos^2 \lambda \quad \text{Rép : 5.C)}$$

6)  $\mathcal{E}_{sat} = \Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,t} - \mathcal{E}_{m,s} = m \left[ \frac{MG}{2R} \left( 1 + \frac{h}{R+h} \right) - \frac{R^2\Omega^2}{2} \cos^2 \lambda \right]$  Rép : 6.D)

## Partie B : Électrocinétique

### III Filtre d'ordre 2

1) On a :  $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}}$ ,  
avec :  $\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}$ , ce qui conduit à :



$$\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + RLC(j\omega)^2} = \frac{j \frac{L}{R} \omega}{1 + j \frac{L}{R} \omega + LC(j\omega)^2}$$

2)  $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{j \frac{x}{Q}}{1 + j \frac{x}{Q} + (jx)^2}$  avec :  $x \equiv \frac{\omega}{\omega_0}$ ,  $\omega_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{R}{L\omega_0} = RC\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

Il s'agit bien entendu d'un **filtre passe-bande du second ordre**.

A.N. :  $f_0 \equiv \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 919 \text{ Hz}$  et  $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} = 5,8$ .

3) Comme  $\underline{H}$  s'écrit :  $\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$ , on a :  $H = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$

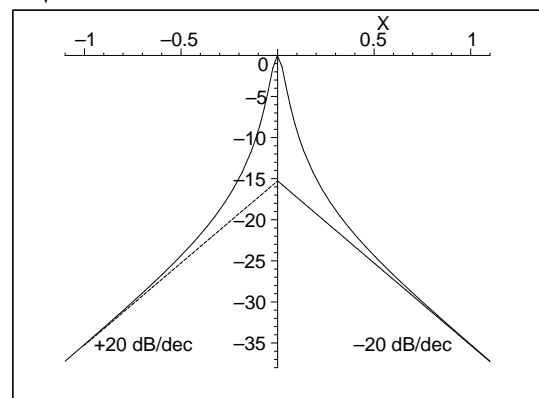
soit :

$$G_{dB} = -10 \log \left[ 1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]$$

$$G_{dB}(\text{max}) = G_{dB}(x = 1) = 0$$

$$G_{dB}(\text{ABF}) = -20 \log Q + 20 \log x$$

$$G_{dB}(\text{AHF}) = -20 \log Q - 20 \log x$$

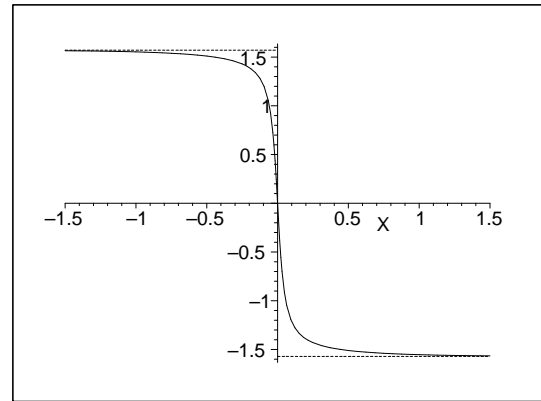


Ces deux asymptotes se coupent en  $(0, -20 \log Q)$ , soit  $(0, -15, 2 \text{ dB})$  pour ce filtre.

$$\varphi = -\arctan \left[ Q \left( x - \frac{1}{x} \right) \right]$$

équation d'asymptotes :

$$\varphi(\text{ABF}) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \varphi(\text{AHF}) = -\frac{\pi}{2}$$



4) Par définition d'une pulsation de coupure  $f_c = x_c \cdot f_0$  :

$$G_{dB}(x_c) = \begin{cases} G_{dB}(\text{max}) - 3 \text{ dB} = 0 - 10 \log 2 \\ -10 \log \left[ 1 + Q^2 \left( x_c - \frac{1}{x_c} \right)^2 \right] \end{cases}$$

On en déduit :  $Q^2 \left( x_c - \frac{1}{x_c} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow Q \left( x_c - \frac{1}{x_c} \right) = \pm 1 \Leftrightarrow x_c^2 \mp \frac{1}{Q} x_c - 1 = 0$

Deux polynômes de discriminant  $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4$

Comme  $\Delta > 0$ , il y a 4 racines réelles, dont deux seulement positives.

$$\begin{aligned} \text{On trouve :} \quad f_{c1,th} = x_1 \cdot f_0 &= \frac{-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2} \cdot f_0 = \frac{f_0}{2Q} (-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}) \simeq 843 \text{ Hz} \\ f_{c2,th} = x_2 \cdot f_0 &= \frac{\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4}}{2} \cdot f_0 = \frac{f_0}{2Q} (1 + \sqrt{1 + 4Q^2}) \simeq 1002 \text{ Hz} \end{aligned}$$

$$5) \quad \Delta f = f_{c2} - f_{c1} = \frac{f_0}{Q} \simeq 159 \text{ Hz}$$

## IV Montage avec amplificateur opérationnel [CCP PC 2006]

1) • Appelons  $A$  et  $B$  les bornes autres que la masse  $M$  des générateurs :

$v_0 = u_{AM} = V_A - V_M = V_A$  et  $v_r = u_{BM} = V_B - V_M = V_B$  puisque  $V_M = 0$  (masse du circuit).

• Pour au A.O. Idéal ( $i_+ = i_- = 0$ ) en régime linéaire :  $\epsilon = 0 \Leftrightarrow V_{E_+} = V_{E_-}$  ①

• Loi des Nœuds en Termes de Potentiels en  $E_-$  :

$$\frac{V_M - V_{E_-}}{R} + \frac{V_s - V_{E_-}}{X} - i_- = 0 \Leftrightarrow v_s = \frac{R+X}{R} \cdot V_{E_-} \quad \text{②}$$

• Loi des Nœuds en Termes de Potentiels en  $E_+$  :

$$\frac{V_A - V_{E_+}}{R} + \frac{V_B - V_{E_+}}{R} + \frac{V_M - V_{E_+}}{R} - i_+ = 0 \Leftrightarrow 3V_{E_+} = v_0 + v_r \quad \text{③}$$

• On obtient : ②  $\xrightarrow{\text{③}}$   $v_s = \frac{1}{3} \cdot \frac{R+X}{R} \cdot (v_0 + v_r)$

2) On a  $v_s = v_0 + v_r$  lorsque  $X = 2R$

$$3) \quad \left. \begin{aligned} v_0 &= U_m \cos(\omega t) \\ v_r &= U_m \cos(\omega(t - \tau)) \end{aligned} \right\} \rightarrow v_s = v_0 + v_r = U_m (\cos(\omega t) + \cos(\omega t - \omega \tau))$$

$$\Leftrightarrow v_s = 2U_m \cos\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\omega \tau}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow v_s = U_s \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad U_s = \frac{U_{Sm}}{\sqrt{2}} = \frac{2U_m}{\sqrt{2}} \cdot \left| \cos\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \right| = \frac{2 \cdot U_0 \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \left| \cos\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \right|$$

$$\text{soit :} \quad U_s = 2U_0 \cdot \left| \cos\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \right|$$

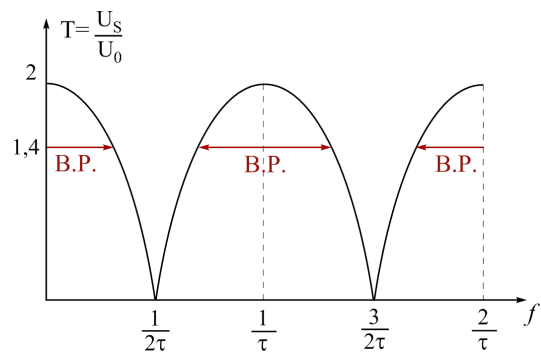
4) • On a donc :  $T = \frac{U_S}{U_0} = 2 \cdot \left| \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$

•  $U_S = 0$

$\Leftrightarrow \pi \cdot \tau \cdot f = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow f = \frac{1}{\tau} \left( \frac{1}{2} + k \right)$  avec  $k \in \mathbb{N}$

• La Bande Passante à  $-3\text{dB}$  correspond à  $T \geq \frac{T_{\max}}{\sqrt{2}}$  soit  $T \geq \frac{2}{\sqrt{2}} \simeq 1,4$

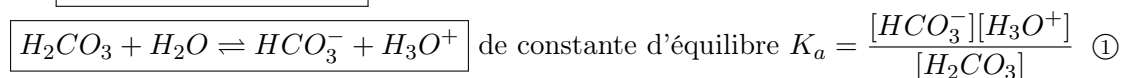
Les intervalles de fréquences pour lesquelles  $T \geq 1,4$  sont représentés sur le graphe ci-contre.



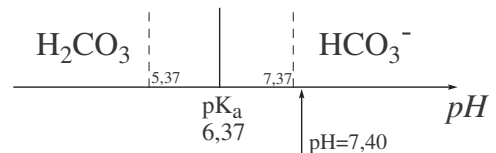
Partie C : Chimie

### V Le sang : un milieu tamponné [Centrale PSI 2009]

1)  $pK_a = -\log K_a = 6,37$  Le couple présent en solution aqueuse est régi par l'équation-bilan :



2) Diagramme de prédominance des deux espèces en fonction du  $pH$ .



3) Conservation de la matière (élément carbone) :

$C_0 = [H_2CO_3] + [HCO_3^-]$  ②.

① et ② conduisent à :

$$\begin{aligned} [H_2CO_3] &= \frac{h \cdot C_0}{K_a + h} = \frac{C_0}{1 + K_a \cdot 10^{pH}} = 2,37 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \\ [HCO_3^-] &= C_0 - [H_2CO_3] = \frac{C_0 K_a}{K_a + 10^{-pH}} = 25,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} \end{aligned}$$

Rq : On vérifie que  $[HCO_3^-] \sim 10 \cdot [H_2CO_3]$ , ce qui est cohérent avec une valeur de  $pH$  légèrement supérieure à  $pK_a + 1$  (cf. Domaine de prédominance).

4.a)

$(\text{mol.L}^{-1})$	$HB$	+	$HCO_3^-$	$\rightarrow$	$H_2CO_3$	+	$B^-$
$t_i$	$2,00 \cdot 10^{-3}$		$25,6 \cdot 10^{-3}$		$2,37 \cdot 10^{-3}$		0
$t_f$	0		$23,6 \cdot 10^{-3}$		$4,37 \cdot 10^{-3}$		$2,00 \cdot 10^{-3}$

Le nouveau  $pH$  est :  $pH = pK_a + \log \frac{[HCO_3^-]}{[H_2CO_3]} = 7,10$

Cette valeur est inférieure aux valeurs usuelles du  $pH$  dans le sang données par l'énoncé : elle est donc incompatible avec la vie.

4.b) La concentration d'acide carbonique ( $H_2CO_3$ ) est maintenue constante grâce à l'expiration de dioxyde de carbone :  $[H_2CO_3] = 2,37 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ .

L'ajout de  $2,00 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$  d'acide lactique fait uniquement baisser la concentration en ion hydrogénocarbonate :

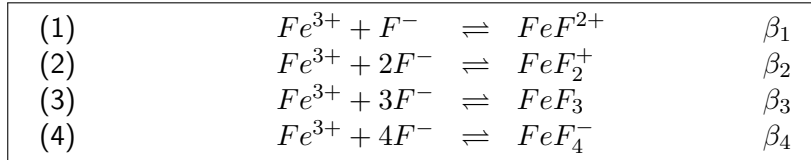
$(\text{mol.L}^{-1})$	$HB$	+	$HCO_3^-$	$\rightarrow$	$H_2CO_3$	+	$B^-$
$t_i$	$2,00 \cdot 10^{-3}$		$25,6 \cdot 10^{-3}$		$2,37 \cdot 10^{-3}$		0
$t_f$	0		$23,6 \cdot 10^{-3}$		$2,37 \cdot 10^{-3}$		$2,00 \cdot 10^{-3}$

Le nouveau  $pH$  est :  $pH = pK_a + \log \frac{[HCO_3^-]}{[H_2CO_3]} = 7,37$

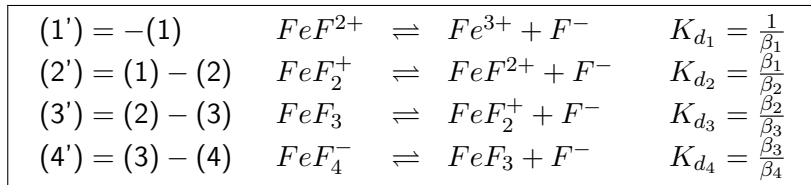
... valeur qui appartient bien à la fourchette fournie par l'énoncé comme valeur acceptable.

## VI Les complexes $FeF_x^{(x-3)-}$ [CCP PSI 2009]

1)



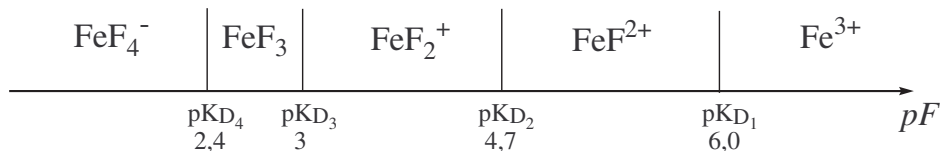
2)



3) Les  $\beta_x$  permettent d'écrire :

$K_{d1} = 10^{-6,0}$	soit : $pK_{d1} = 6,0$
$K_{d2} = 10^{-4,7}$	soit : $pK_{d2} = 4,7$
$K_{d3} = 10^{-3,0}$	soit : $pK_{d3} = 3,0$
$K_{d4} = 10^{-2,4}$	soit : $pK_{d4} = 2,4$

4)



5.a) d'après le diagramme de prédominance,  $pF = 5,3$  est sur le domaine de prédominance de  $FeF^{2+}$ .

À  $pH = 5,3$ , c'est le complexe  $FeF^{2+}$  qui prédomine.

5.b)  $[F^-] = 9.10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$  correspond à :  $pF = -\log[F^-] \simeq 3$ .

D'après le domaine de prédominance :

pour  $[F^-] = 9.10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$ , les espèces  $FeF_2^+$  et  $FeF_3$  sont codominantes