Correction DS n°5

I Véhicule sur une route ondulée [ENSTIM 2006]

1) On étudie le véhicule, assimilé à un point matériel $\{G, M\}$ dans le référentiel terrestre considéré galiléen. Il est soumis :
- à son poids : $M\overrightarrow{g} = -Mg\overrightarrow{e_z}$
- à la force de rappel du ressort : $\overrightarrow{F_r} = -k.(l-l_0)\,\overrightarrow{e_z} = -k.(z_G - z_O - l_0)\,\overrightarrow{e_z}$
- à la force de frottement fluide : $\overrightarrow{F} = -h.(\dot{z}_G - \dot{z}_O)\,\overrightarrow{e_z}$

Lorsque le véhicule est au repos, le PFD s'écrit : $\overrightarrow{0} = M\overrightarrow{g} - k.(z_{G,\text{éq}} - z_{O,\text{éq}} - l_0)\,\overrightarrow{e_z} + \overrightarrow{0}$ ①

On en déduit : $\boxed{z_{G,\text{éq}} = l_0 + R - \dfrac{Mg}{k}}$ ② (car $z_{O,\text{éq}} = R$)

2) Pour **établir** l'énergie potentielle de pesanteur (à une constante près), on cherche à écrire le travail élémentaire du poids sous la forme de l'opposé de la différentielle de l'énergie potentielle de pesanteur :
$\delta W(M\overrightarrow{g}) = M\overrightarrow{g}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{CG} = -Mg\overrightarrow{e_z}\,.\,\mathrm{d}(z_G\overrightarrow{e_z}) = -\mathrm{d}Mgz_G = -\mathrm{d}\mathcal{E}_{pg} \Rightarrow \mathcal{E}_{p,\text{g}} = Mgz_G + \text{Cte}$
Donc : $\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{g}} = Mgz + K}$ ③ (car $z_G = z + z_{G,\text{éq}}$)

3) Pour **établir** l'énergie potentielle élastique (à une constante près), on cherche à écrire le travail élémentaire de la force de rappel du ressort sous la forme de l'opposé de la différentielle de l'énergie potentielle élastique :
$\delta W(\overrightarrow{F_r}) = \overrightarrow{F_r}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{CG} = -k.(z_G - z_{O,\text{éq}} - l_0)\,\overrightarrow{e_z}\,.\,\mathrm{d}(z_G\overrightarrow{e_z}) = -\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}k.(z_G - z_{O,\text{éq}} - l_0)^2\right) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,\text{él}}$

Donc : $\mathcal{E}_{p,\text{él}} = \dfrac{1}{2}k.(z_G - z_{O,\text{éq}} - l_0)^2 + K'$ — soit, d'après ② : $\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{él}} = \dfrac{1}{2}k.\left(z - \dfrac{Mg}{k}\right)^2 + K'}$ ④

4) Le Thm$\mathcal{E}_k$ s'écrit, entre t et $t+\mathrm{d}t$: $\mathrm{d}\mathcal{E}_k = \delta W(M\overrightarrow{g}) + \delta W(\overrightarrow{F_r}) + \delta W(\overrightarrow{F})$

Soit, d'après ③ et ④ : $\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}M\dot{z}_G^2\right) = -Mg\mathrm{d}z - \mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}k.\left(z - \dfrac{Mg}{k}\right)^2\right) - h.(\mathrm{d}z_G - \cancel{\mathrm{d}z_{O,\text{éq}}}).\mathrm{d}z_G$

Soit, avec $\dot{z} = \dot{z}_G$ (non nul pusiqu'il y a mouvement) :
$\dfrac{1}{\cancel{2}}.M.\cancel{2}.\cancel{\dot{z}}.\ddot{z} = -Mg\cancel{\dot{z}} - \dfrac{1}{\cancel{2}}.k.\cancel{2}.\cancel{\dot{z}}.\left(z - \dfrac{Mg}{k}\right) - h.\cancel{\dot{z}}.\dot{z}$

Donc : $\boxed{\ddot{z} + \dfrac{h}{M}.\dot{z} + \dfrac{k}{M}.z = 0}$

5) $[h] = \dfrac{[F]}{[v]} = \dfrac{M.L.T^{-2}}{L.T^{-1}} = M.T^{-1}$ donc : $\boxed{u(h) = kg.s^{-1}}$

6) Par définition de la pulsation : $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ où T est la période temporelle du mouvement.
La vitesse étant constante, elle est définie par le rapport entre une distance et le temps correspondant : $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{L}{T}$. D'où : $\boxed{\omega = \dfrac{2\pi.v}{L}}$

7) Le PFD s'écrit : $M\overrightarrow{a_G} = M\overrightarrow{g} - k.(z_G - z_O - l_0)\,\overrightarrow{e_z} + -h.(\dot{z}_G - \dot{z}_O)\,\overrightarrow{e_z}$ ⑤
En projetant ⑤ − ① : $M\ddot{z} = -k.(z_G - z_{G,\text{éq}} - (z_O - z_{O,\text{éq}}) - h.(\dot{z}_G - \dot{z}_O))$
Comme $\dot{z}_G = \dot{z}$ puisque $z = z_G - z_{G,\text{éq}}$, l'équation devient : $M\ddot{z} = -k.(z - (z_O - z_{O,\text{éq}})) - h.(\dot{z} - \dot{z}_O)$
Comme $z_O = R + A\cos(\omega t) = z_{O,\text{éq}} + e(t)$:
$\boxed{\ddot{z} + \dfrac{h}{M}.\dot{z} + \dfrac{k}{M}.z = \dfrac{k}{M}.e + \dfrac{h}{M}.\dot{e}} \Leftrightarrow \ddot{z} + \dfrac{\omega_0}{Q}.\dot{z} + \omega_0^2.z = \omega_0^2.e + \dfrac{\omega_0}{Q}.\dot{e}$

8) Cette équation devient, en régime sinusoïdal et en notation complexe :

$$\left(\omega_0^2-\omega^2+j\frac{\omega_0}{Q}\omega\right).\underline{Z}=\underline{A}.\left(\omega_0^2+j\frac{\omega_0}{Q}\omega\right)\Leftrightarrow\frac{\underline{Z}}{\underline{A}}=\frac{\omega_0^2+j\dfrac{\omega_0}{Q}\omega}{\omega_0^2-\omega^2+j\dfrac{\omega_0}{Q}\omega}=\frac{1+j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}$$

On en déduit : $\boxed{\dfrac{\underline{Z}}{\underline{A}}=\dfrac{1+j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}}$ avec $\boxed{\omega_0=\sqrt{\dfrac{k}{M}}\quad\Big|\quad Q=\dfrac{\sqrt{kM}}{h}\quad\Big|\quad\omega_1=Q\omega_0=\dfrac{k}{h}}$

9) $\boxed{\omega_0=10\ rad.s^{-1}\ \Big|\ Q=2,5\ \Big|\ \omega_1=25\ rad.s^{-1}}$

10) $\boxed{\left|\dfrac{\underline{Z}}{\underline{A}}\right|=\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}}}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$

II Facteur de Puissance [ENAC 2002]

1) Loi d'Ohm aux bornes de la résistance R :

$\boxed{e(t)=R.i_2(t)}\Leftrightarrow i_2(t)=\dfrac{E\sqrt{2}}{R}\cos(\omega t)=I_2\sqrt{2}\cos(\omega t+\varphi_2)$ avec $\boxed{I_2=\dfrac{E}{R}}$ et $\boxed{\varphi_2=0}$

2) Loi des nœuds en A : $\boxed{\underline{I}_3=\underline{I}_1+\underline{I}_2}$ avec $\underline{I}_1=I_1.e^{j\varphi_1}$ et $\underline{I}_2=I_2$ (puisque $\varphi_2=0$).
On en déduit : $I_3^2=\underline{I}_3.\underline{I}_3^*=(I_1.e^{j\varphi_1}+I_2).(I_1.e^{-j\varphi_1}+I_2)=I_1^2+I_2^2+I_1I_2(e^{j\varphi_1}+e^{-j\varphi_1})$

soit : $\boxed{I_3=\sqrt{I_1^2+I_2^2+2I_1I_2\cos\varphi_1}}$ **Rép. A)**

3) D'où : $\cos\varphi_1=\dfrac{I_3^2-I_1^2-I_2^2}{2I_1I_2}$ soit, puisque $I_2=\dfrac{E}{R}$: $\boxed{\cos\varphi_1=\dfrac{R^2(I_3^1-I_1^2)-E^2}{2R.I_1.E}\simeq 0,7417}$

4) En régime sinusoïdal, la puissance moyenne reçue par le moteur soumis à la tension e (d'amplitude complexe $\underline{E}=E_m$) et parcouru par l'intensité i_1 (d'amplitude complexe $\underline{I}_1=I_{1m}.e^{j\varphi_1}$) s'écrit : $\mathcal{P}_\mathcal{M}=\dfrac{1}{2}E_mI_{1m}\cos\varphi_1$
Donc, en faisant apparaître les grandeurs efficaces : $\boxed{\mathcal{P}_\mathcal{M}=E.I_1.\cos\varphi_1=1\,691\ W}$ **Rép. B)**

5) L'impédance complexe du moteur : $\underline{Z}_1=r+jL\omega=\dfrac{\underline{E}}{\underline{I}_1}=\dfrac{E}{I_1}.e^{-j\varphi_1}=Z_1\cos\varphi_1-jZ_1\sin\varphi_1$
On a donc : $\cos\varphi_1=\dfrac{r}{Z_1}$ avec $Z_1=\dfrac{E}{I_1}$
Dès lors $\mathcal{P}_\mathcal{M}=E.I_1.\cos\varphi_1$ s'écrit également : $\mathcal{P}_\mathcal{M}=I_1^2.Z_1.\cos\varphi_1=r.I_1^2$
D'où : $\boxed{r=\dfrac{\mathcal{P}_\mathcal{M}}{I_1^2}\simeq 47\ \Omega}$ **Rq :** On pouvait écrire : $r=Z_1\cos\varphi_1=\dfrac{E}{I_1}\cos\varphi_1\simeq 47\ \Omega$

6) Comme par ailleurs : $Z_1=\sqrt{r^2+L^2\omega^2}=\dfrac{E}{I_1}$, on en déduit : $\boxed{L=\dfrac{1}{2\pi f}\sqrt{\dfrac{E^2}{I_1^2}-r^2}\simeq 135\ mH}$

7) Puissance moyenne reçue par la résistance R : $\mathcal{P}_R=E.I_2.\cos\varphi_2=E.I_2=\dfrac{E^2}{R}=3\,800\ W$.
D'où la puissance moyenne fournie par le générateur : $\boxed{\mathcal{P}_g=\mathcal{P}_\mathcal{M}+\mathcal{P}_g=5\,491\ \Omega}$ **Rép. A)**

8) Puisque $\mathcal{P}_g=E.I_3.\cos\varphi_3$ on en déduit : $\boxed{\cos\varphi_3=\dfrac{\mathcal{P}_g}{E.I_3}=0,9633}$ **Rép. B)**

9) La loi d'Ohm généralisée aux bornes du condensateur : $\boxed{\underline{E} = \dfrac{\underline{I_4}}{jC\omega}}$

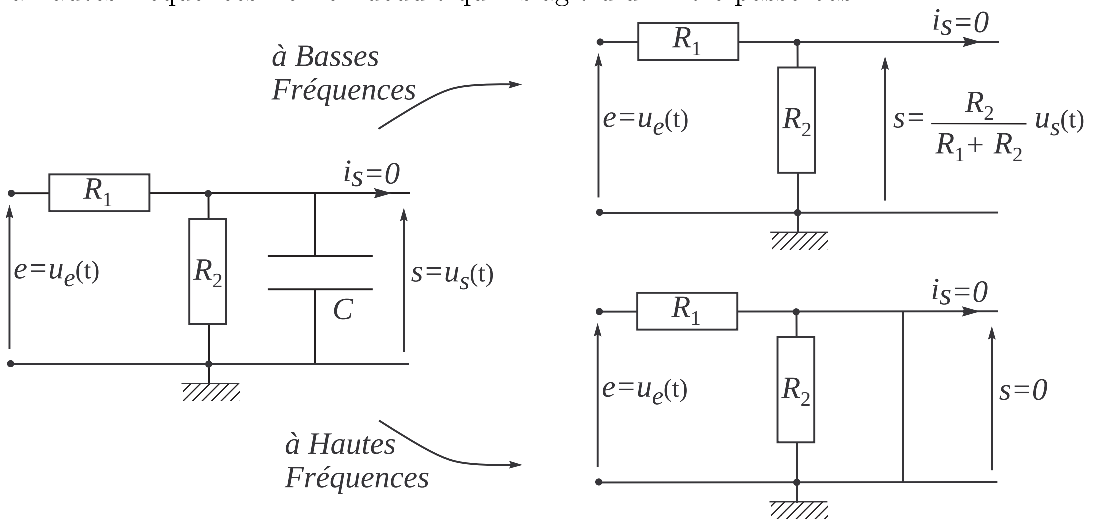
Soit $I_4.e^{j\varphi_4} = jC\omega E = CE\omega.e^{j\frac{\pi}{2}}$. Donc : $\boxed{\varphi_4 = \dfrac{\pi}{2}}$ et $\boxed{I_4 = CE\omega}$

10) La nouvelle loi des nœuds en A s'écrit : $\underline{I_3} = \underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_4} \;\Leftrightarrow\; I_3.^{j\varphi'_3} = I_1.e^{j\varphi_1} + I_2 + I_4.e^{1\frac{\pi}{2}}$
Imposer un facteur de puissance $\cos\varphi'_3 = 1$ revient à imposer $\varphi'_3 = 0$.
La loi des nœuds s'écrit alors : $I_3 = I_1\cos\varphi_1 + I_2 + j(I_1\sin\varphi_1 + I_4) \;\Rightarrow\; I_1\sin\varphi_1 + I_4 = 0$
Cette dernière relation nous donne le signe de $\sin\varphi_1$ puisque $\sin\varphi_1 = -\dfrac{I_4}{I_1} = -\dfrac{CE\omega}{I_1} < 0$
Comme $\cos\varphi_1$ est déjà connu (cf. **3)**), on en déduit la valeur de $\sin\varphi_1$:
$\sin\varphi_1 = -\sqrt{1-\cos^2\varphi_1} \simeq -0,6707$

Enfin, on obtient la capacité cherchée : $\boxed{C = -\dfrac{I_1\sin\varphi_1}{E.2\pi.f} \simeq 33,7\ \mu F}$ **Rép. D)**

III Filtre du premier ordre

1) Une condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert à basses fréquences et comme un fil à hautes fréquences : on en déduit qu'il s'agit d'un filtre passe-bas.



2) L'impédance complexe équivalente de la résistance R_2 en parallèle avec la capacité C s'écrit :

$$\underline{Z} = \frac{R_2.\dfrac{1}{jC\omega}}{R_2 + \dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{R_2}{1 + jR_2C\omega}$$

La fonction de transfert s'obtient facilement à partir du diviseur de tension :

$$\underline{u_s} = \frac{\underline{Z}}{R_1 + \underline{Z}}\underline{u_e} \;\Leftrightarrow\; \underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{\frac{R_2}{1+jR_2C\omega}}{R_1 + \frac{R_2}{1+jR_2C\omega}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + jR_1R_2C\omega}$$

Donc : $\boxed{\underline{H} = \dfrac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{1 + j\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C\omega}}$ Soit : $\boxed{\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$ avec $\boxed{H_0 = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2C}}$

3) lorsque $R_1 = R_2$: $\boxed{H_0 = \dfrac{1}{2}}$ et $\boxed{\omega_0 = \dfrac{2}{R_1C}}$

4) En introduisant la pulsation réduite $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$: $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + jx}$

soit : $H = \dfrac{H_0}{\sqrt{1+x^2}}$ et donc : $\boxed{G_{dB} = 20\log H = 20\log H_0 - 10\log(1+x^2)}$

- Asymptote BF : $\omega \ll \omega_0 \;\Leftrightarrow\; x \ll 1$: $\boxed{G_{dB}(\text{ABF}) = 20\log H_0 = -20\log 2 \simeq -6,0\ dB}$

L'ABF est une droite horizontale de valeur $-6,0\ dB$.

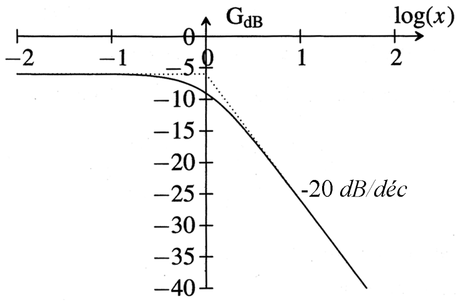
- **Asymptote HF :** $\omega \gg \omega_0 \ \Leftrightarrow \ x \gg 1$:

$\boxed{G_{dB}(\text{AHF}) = 20\log H_0 - 20\log x}$

L'AHF est une droite de pente $-20\ dB/$déc et d'ordonnée à l'origine $-6,0\ dB$.

- Pour $\omega = \omega_0$, on a $x = 1$ et donc :

$\boxed{G_{dB} = 20\log H_0 - 10\log 2 = -30\log 2 \simeq -9,0\ dB}$



5) Comme : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1+jx} = He^{j\varphi}$, on a $\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(H_0) - \arg(1+jx)$

Donc : $\boxed{\varphi = -\arctan x}$

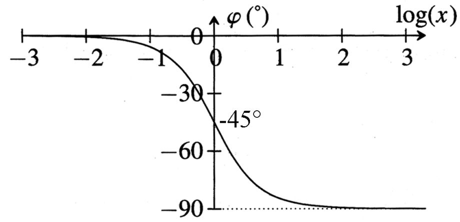
- **Asymptote BF :** $\omega \ll \omega_0 \ \Leftrightarrow \ x \ll 1$: $\boxed{\varphi(\text{ABF}) = 0°}$

- **Asymptote HF :** $\omega \gg \omega_0 \ \Leftrightarrow \ x \gg 1$:

$\boxed{\varphi(\text{AHF}) = -\dfrac{\pi}{2} = -90°}$

- Pour $\omega = \omega_0$, on a $x = 1$ et donc :

$\boxed{\varphi = -\arctan 1 = -\dfrac{\pi}{4} = -45°}$



6) Le filtre étant un filtre passe bas, $H_{\text{max}} = H(\omega = 0) = H_0$

donc, $\boxed{\text{la bande passante est } [0, \omega_c]}$ avec la pulsation de coupure ω_c telle que :

$$H(\omega_c) = \begin{cases} \dfrac{H_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{H_0}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{H_0}{\sqrt{1+x_c^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \ x_c^2 = 1 \ \Leftrightarrow \ \boxed{\omega_c = \omega_0 = \frac{2}{R_1 C} = 626\ rad.s^{-1}}$$

7) Pour $f = 10\ kHz$, $\omega = 2\pi f \simeq 62,8\ kHz$, $x \simeq 100,4$ soit :

$\boxed{G_{dB} = 20\log H_0 - 10\log(1+x^2) \simeq -46,0\ dB}$

Comme $G_{dB} = 20\log H = 20\log\left(\dfrac{U_{sm}(\omega)}{U_{em}}\right) \ \Leftrightarrow \ \dfrac{U_{sm}(\omega)}{U_{em}} = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$

on en déduit : $\boxed{U_{sm} \simeq 10^{-2,6} U_{em} \simeq 5.10^{-3} \times 6 = 0,03\ V \ll U_{em}}$

8) Le filtre étant linéaire, pour obtenir la tension de sortie s associée à e, il suffit de sommer la tension de sortie u_s précédemment calculée et la tension de sortie S calculée pour une tension d'entrée constante E :

$$e = u_e + E \ \longrightarrow \ s = u_s + S$$

Dans le cas du régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la composante continue de la tension de sortie est (cf. **1)**) : $\boxed{S = H_0.E = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}.E = \dfrac{E}{2} = 3\ V}$

La tension de sortie est donc : $\boxed{s(t) = U_{sm}\cos(\omega t + \varphi) + S \simeq S = 3V}$ car $U_{sm} \ll S$

Rq : Le filtre passe-bas coupe la composante sinusoïdale u_e de fréquence $f = 10\ kHz$ de la tension d'entrée $e(t)$ car $f \gg f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi} \simeq 100\ Hz$