

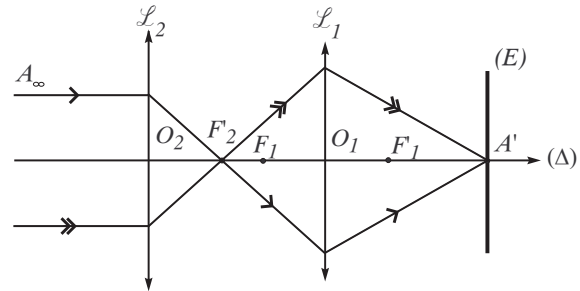
Correction DS n°3

Physique : Optique géométrique et mécanique

I Focométrie

- 1) Sans la lentille \mathcal{L}_2 , le conjugué de l'infini se trouve dans le plan focal image de la lentille \mathcal{L}_1 . Initialement, on donc : $A = F'_1$.
En plaçant la lentille \mathcal{L}_2 avant \mathcal{L}_1 , on a :

$$\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_2} F'_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A'$$



La relation de DESCARTES pour la lentille \mathcal{L}_1 s'écrit : $\frac{1}{O_1A'} - \frac{1}{O_1F'_2} = \frac{1}{f'_1}$,

avec : $\overline{O_1A'} = f'_1 + \overline{AA'}$ et $\overline{O_1F'_2} = -D_2 + f'_2$.

On obtient :
$$f'_2 = D_2 - f'_1 - \frac{f_1'^2}{AA'}$$
 A.N. :
$$f'_2 = 30 \text{ cm}$$

- 2) **Méthode de Badal** : Lorsque $D_2 = f'_1$ l'expression précédente devient :
$$f'_2 = -\frac{f_1'^2}{AA'}$$
.

Dans cette situation, et pour une lentille convergente : $\overline{AA'} = -\frac{f_1'^2}{f'_2} < 0$.

Ceci impose une limitation sur f'_2 puisqu'une observation fait sur un écran suppose que l'image A' soit *réelle*, c'est-à-dire :

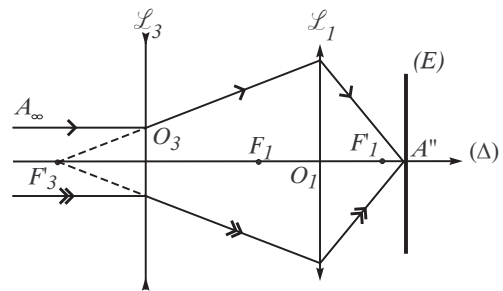
$$\overline{A'A} = \frac{f_1'^2}{f'_2} < f'_1 \iff f'_2 > f'_1$$

Pour une image finale A' virtuelle (cas $f'_2 < f'_1$), l'écran est inutilisable mais on peut toujours utiliser une lunette de visée à frontale fixe (viseur).

- 3) Le raisonnement étant identique à celui qui a été présenté en **1)**, on trouve :

$$f'_3 = D_3 - f'_1 - \frac{f_1'^2}{AA''}$$

A.N. :
$$f'_3 = -30 \text{ cm}$$
.



- 4) **Méthode de Badal** : Lorsque $D_3 = f'_1$ l'expression précédente devient :
$$f'_3 = -\frac{f_1'^2}{AA''}$$
.

La lentille \mathcal{L}_3 étant divergente ($f'_3 < 0$) on a, cette fois : $\overline{AA''} = -\frac{f_1'^2}{f'_3} > 0$.

Ainsi, on doit éloigner l'écran de \mathcal{L}_1 pour récupérer l'image.

La méthode de Badal appliquée permet d'utiliser un écran d'observation pour toutes les lentilles divergentes, sans limitation quant à leur distance focale.

II Mouvement d'une bille dans un liquide [ENSTIM 1997]

- 1)
$$\vec{F}_A = -m_f \vec{g} = -\rho_0 V \vec{g} = -\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 \vec{g}$$
 (force verticale opposée au poids, donc selon $-\vec{e}_z$)

2) Le système $\mathcal{S} = \{\text{bille}, m\}$ est étudié dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T considéré galiléen. Il est soumis à :

- son poids : $m \vec{g} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \vec{g}$
- la force d'Archimède $\vec{F}_A = -\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 \vec{g}$
- la force de frottement de la glycérine sur la bille : $\vec{f} = -6\pi\eta r \vec{v}$ où $\vec{v} = \overrightarrow{v_{M/\mathcal{R}_T}} = v \vec{e}_z$

3) Le Principe Fondamental de la Dynamique dans \mathcal{R}_T pour \mathcal{S} : $m \overrightarrow{a_{M/\mathcal{R}_T}} = m \vec{g} + \vec{F}_A + \vec{f}$ soit :

$$m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_T} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \vec{g} - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 \vec{g} - 6\pi\eta r \vec{v}$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_T} + \frac{6\pi\eta r}{m} \vec{v} = \frac{4}{3} \pi r^3 \frac{\rho - \rho_0}{m} \vec{g} \quad \text{avec : } m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$$

Soit : $\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_T} + \frac{9\eta}{2r^2\rho} \vec{v} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \cdot \vec{g}$

4) • Comme $\vec{v} = v_z \vec{e}_z$, on a : $\frac{dv_z}{dt} + \frac{9\eta}{2r^2\rho} \cdot v_z = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \cdot g$

• La solution de cette équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et de second membre constant est : $v_z = v_{z,G} + v_{z,P}$, avec $v_{z,G}$ la solution générale de l'équation homogène et $v_{z,P}$ une solution particulière de l'équation avec second membre (elle-même constante puisque le second membre est constant).

• On a donc : $v_z = \frac{2(\rho - \rho_0)g}{9\eta} \cdot r^2 + A \exp\left(-\frac{9\eta}{2r^2\rho} \cdot t\right)$

• La constante d'intégration s'obtient à partir de la condition initiale : à $t = 0$:

$$v_z = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{2(\rho - \rho_0)g}{9\eta} \cdot r^2 + A \end{array} \right. \rightarrow v_z = v_{\text{lim}} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \quad \text{avec } \left\{ \begin{array}{l} v_{\text{lim}} = \frac{2(\rho - \rho_0)g}{9\eta} \cdot r^2 \\ \tau = \frac{2\rho \cdot r^2}{9\eta} \end{array} \right.$$

Rq : On peut aussi exprimer τ en fonction de m : $\tau = \frac{m}{6\pi\eta r}$

5) On a établi que $y = v_{\text{lim}}$ est de la forme $y = a \cdot x + b$

avec $x = r^2$, $a = \frac{2(\rho - \rho_0)}{9\eta} \cdot g$ et $b = 0$.

En traçant $y(x)$ on doit obtenir une droite passant par l'origine.

Une régression linéaire le confirme avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 22,3 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \\ b = 0,002 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ R^2 = 0,9998 \end{array} \right.$$

On a donc $\eta = \frac{2(\rho - \rho_0)}{9a} \cdot g$

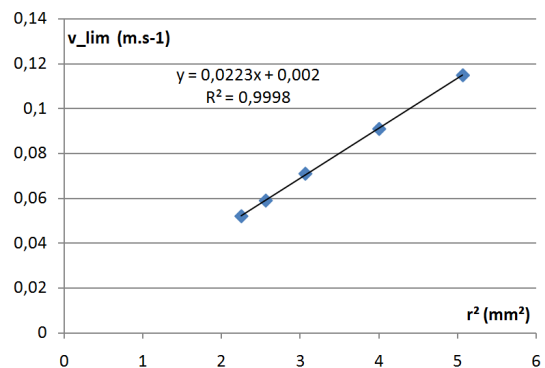
Comme $[\eta] = \frac{[\rho]}{[a]} [g] = \frac{M \cdot L^{-3}}{L^{-1} \cdot T^{-1}} \cdot L \cdot T^{-2} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$ η s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\rightarrow \text{donc : } \eta = \frac{2(\rho - \rho_0)}{9a} \cdot g = \frac{2 \times (7800 - 1260)}{9 \times 22,3 \cdot 10^3} \cdot 9,8 = 0,64 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

6) Pour $r = 1,5 \text{ mm}$, on a :

$$\tau = \frac{2r^2\rho}{9\eta} = \frac{2 \times (1,5 \cdot 10^{-3})^2 \times 7800}{9 \times 0,64} = 6,1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

→ La vitesse limite est atteinte au bout de quelques τ , donc de quelques dizaines de milli-secondes : on peut facilement mesurer v_{lim} mais difficilement observer l'établissement de cette vitesse.



III Bille sur un guide circulaire [ICNA 2006(B), q.15-21]

15) On applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et O :

$$\Delta \mathcal{E}_{k,A \rightarrow O} = \frac{mv_0^2}{2} - \underbrace{\frac{mv_A^2}{2}}_0 = W_{A \rightarrow O}(\vec{P}) + \underbrace{W_{A \rightarrow O}(\vec{R})}_{0 \text{ aucun frottement}} = -\Delta \mathcal{E}_{pg,A \rightarrow O} = -mg(y_O - y_A) = mgh$$

D'où : $v_0 = \sqrt{2gh}$ Rép. **A**)

16) Le Théorème de l' \mathcal{E}_k entre O et M conduit à :

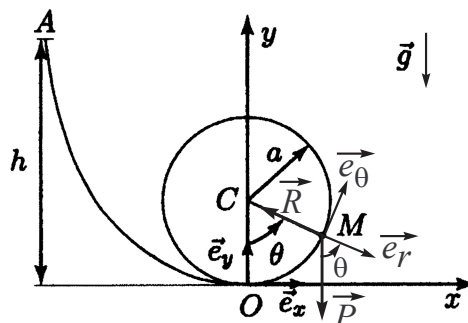
$$v_M^2 = v_0^2 - 2gy_M = 2gh - 2ga(1 - \cos \theta)$$

D'où : $v_M = \sqrt{2g[h + a(\cos \theta - 1)]}$ Rép. **D**)

17) Le PFD appliqué pour le mouvement circulaire et exprimé dans la base polaire donne :

$$m \begin{vmatrix} \dot{a} - a\dot{\theta}^2 \\ a\ddot{\theta} + 2\dot{a}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} mg \cos \theta + R \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$)



Comme le mouvement est circulaire de rayon $a = cste$ et de vitesse angulaire $\dot{\theta}$, on a $a\dot{\theta}^2 = \frac{v_M^2}{a}$, ce qui permet d'écrire la composante R de la réaction $\vec{R} = R\vec{e}_r$ sous la forme :

$$R = -mg \cos \theta - ma\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta - m\frac{v_M^2}{a}$$

En utilisant le résultat de **16**) , on trouve : $\vec{R} = -mg \left(\frac{2h}{a} + 3 \cos \theta - 2 \right) \vec{e}_r$ Rép. **B**)

18) Le mouvement est révolatif dès lors que $R < 0$ pour toute position de M en contact avec la gouttière (puisque le contact impose \vec{R} selon $-\vec{e}_r$).

En particulier, on doit avoir M a contact avec la gouttière pour $\theta = \pi$, ce qui impose :

$$\frac{2h}{a} + 3 \cos \pi - 2 > 0 \Leftrightarrow h > \frac{5a}{2} = h_{min} \text{ Rép. B)}$$

19) Puisque $h_0 = 2a < h_{min}$, la bille n'a pas de mouvement révolatif : elle quitte la gouttière pour $\theta_0 \leq \pi \Leftrightarrow R(\theta_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{2h_0}{a} + 3 \cos \theta_0 - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos \theta_0 = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \theta_0 = \arccos \left(-\frac{2}{3} \right) = 131,8^\circ \text{ Rép. C)}$$

20) $\vec{v}_M = v_M \vec{e}_\theta$ avec, pour $\theta = \theta_0$: $v_M(\theta_0) = v_0$ qu'on peut encore déterminer au moment du décollement à partir de la relation obtenue en **16**) : $v_0 = \sqrt{2g[h_0 + a(\cos \theta_0 - 1)]} = \sqrt{\frac{2ga}{3}}$

De plus, par définition de v_{0x} , on a : $v_{0x} = \vec{v}_M \cdot \vec{e}_x = v_0 \cos \theta_0$, d'où :

$$v_{0x} = -\frac{2}{3}v_0 = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2ga}{3}} \text{ Rép. A)}$$

21) Puisque les frottements sont négligés, la bille est soumise à son seul poids (chute libre) à partir du moment où M décolle de la gouttière pour une date choisie comme origine $t = 0$, $\theta = \theta_0$ et $\vec{v}_M = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0y}\vec{e}_y$.

Par définition : $v_{0y} = \sqrt{v_0^2 - v_{0x}^2} = \sqrt{v_0^2 - \left(-\frac{2}{3}v_0\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}v_0$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -mg \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_{0x} \\ \dot{y} = -gt + v_{0y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_{0x}t + x_0 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + a(1 - \cos \theta_0) \end{cases}$$

Par ailleurs, $y = y_{max} = h_M$ pour $\dot{y} = 0$, c'est-à-dire pour $t_M = \frac{v_{0y}}{g}$.

$$\rightarrow \text{D'où : } h_M = y_{max} = -\frac{1}{2g}v_{0y}^2 + \frac{v_{0y}}{g} + a(1 - \cos \theta_0)$$

Les valeurs de v_{0y} et de $\cos \theta_0$ (cf. **19**) conduisent à : $h_M = \frac{50}{27}a$ Rép. **A**

Chimie : Cinétique chimique

IV Étude cinétique de la saponification [d'après CAPES 1994]

1) La vitesse de réaction se définit à partir de l'ensemble des constituants du milieu réactionnel sous la forme : $v = -\frac{d[\text{ester}]}{dt} = -\frac{d[OH^-]}{dt} = \frac{d[\text{acide}]}{dt} = \frac{d[\text{alcool}]}{dt}$ puisque tous les coefficients stœchiométriques de l'équation sont égaux à 1.

2) Des réactifs initialement en proportions stœchiométriques $\left(\frac{[\text{ester}]_0}{1} = \frac{[OH^-]_0}{1} = \frac{C_0}{1}\right)$ le demeurent au cours du temps : $\frac{[\text{ester}](t)}{1} = \frac{[OH^-](t)}{1}$, soit : $[OH^-] = \frac{1}{1}[\text{ester}] = C$

3) $v = k \cdot [\text{ester}]^p [OH^-]^q = k \cdot C^{p+q}$

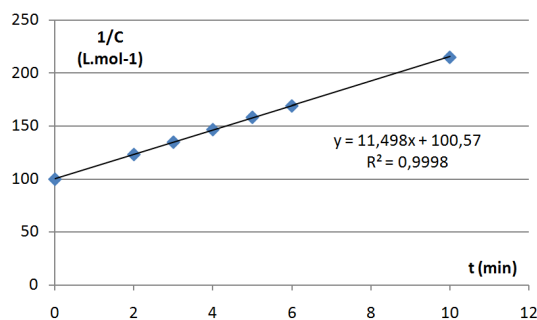
4) Si la cinétique est d'ordre 2 : $v = k \cdot C^2$. Par ailleurs $v = -\frac{dC}{dt}$, donc : $-\frac{dC}{C^2} = k \cdot dt$

On en déduit : $\int_{C_0}^C -\frac{dC'}{C'^2} = k \cdot \int_0^t dt'$ soit : $\frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} = kt \Leftrightarrow \frac{1}{C} = kt + \frac{1}{C_0}$ (*)

5) Si la vitesse est d'ordre 2 le tracé de $y = \frac{1}{C}$ en fonction de t doit être une droite $y = a \cdot x + b$ de pente $a = k$ et d'ordonnée à l'origine $b = \frac{1}{C_0}$

Une régression linéaire confirme cela :

$$\begin{aligned} a &= 11,50 \text{ L.mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1} \\ b &= 100,6 \text{ L.mol}^{-1} \\ R^2 &= 0,9998 \end{aligned}$$



6) L'analyse de cette droite conduit à :

$$k = 11,50 \text{ L.mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

Comme on a (*), lorsque $t = \tau_{1/2} : \frac{2}{C_0} = k \cdot \tau_{1/2} + \frac{1}{C_0}$ soit : $\tau_{1/2} = \frac{1}{k \cdot C_0} \simeq 8,7 \text{ min}$

7) Lorsque la température passe de la valeur T_1 à T_2 , la constante de vitesse passe de la valeur k_1 à k_2 :

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= A \cdot \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_a}{RT_1}\right) \\ k_2 &= A \cdot \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_a}{RT_2}\right) \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{k_2}{k_1} = \exp\left[\frac{\mathcal{E}_a}{R} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] \rightarrow k_2 = k_1 \cdot \exp\left(\frac{\mathcal{E}_a}{R} \cdot \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}\right)$$

D'où : $k_2 = 594 \text{ L.mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$ et donc $\tau_{1/2}(T_2) = \frac{1}{k \cdot C_0} \simeq 0,17 \text{ min} \simeq 10 \text{ s}$

CI : Une élévation de $40^\circ C$ accélère considérablement la réaction.