

Correction du Devoir Surveillé n°10

Physique : Électrostatique

I Ligne coaxiale [d'après Banque PT 2008, Phys. A]

1) En ce qui concerne les symétries et les invariances, l'énoncé autorise l'hypothèse simplificatrice d'une distribution infiniment longue selon Oz . Dès lors, on travaille dans la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:

• La distribution de charge \mathcal{D} est invariante pour toute translation selon Oz et pour toute rotation autour de Oz .

$$\Rightarrow \forall M \in \mathcal{E} : \vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r) \quad (\star)$$

• Les plans $(\Pi_1) = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ et $(\Pi_2) = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ étant des plans de symétrie des charges passant par M , le champ $\vec{E}(M)$ est inclus dans leur intersection, soit (M, \vec{e}_r) .

$$\Rightarrow \forall M \in \mathcal{E} : \vec{E}(M) = E(M) \cdot \vec{e}_r \quad (\star\star)$$

• de (\star) et $(\star\star)$, on déduit : $\boxed{\vec{E}(M) = E(r) \cdot \vec{e}_r}$

2) • **Surface de Gauss** adaptée au problème : surface fermée $\mathcal{S} = S_1 \cup S_2 \cup S_l$ formant un cylindre

- de hauteur h

- de surface latérale $S_l = 2\pi \cdot r \cdot h$ passant par M et orientée en chacun de ses points P par $\vec{n}_{\text{ext}} = \vec{e}_{r_P}$ avec $r_P = r$

- de section S_1 orientée en chacun de ses points P par $\vec{n}_{\text{ext}} = \vec{e}_z$

- de section S_2 orientée en chacun de ses points P par $\vec{n}_{\text{ext}} = -\vec{e}_z$

• **Théorème de Gauss** : $\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot dS \cdot \vec{n}_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon}$

(en remplaçant ϵ_0 par ϵ comme l'énoncé l'indiquait) — Soit :

$$\begin{aligned} \oiint_{\mathcal{S}} E(r_P) \cdot \vec{e}_{r_P} \cdot dS \cdot \vec{n}_{\text{ext}} &= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon} \\ \int_{S_1} \cancel{E(r_P) \cdot \vec{e}_{r_P} \cdot dS \cdot \vec{e}_z} + \int_{S_2} \cancel{E(r_P) \cdot \vec{e}_{r_P} \cdot dS \cdot (-\vec{e}_z)} + \int_{S_l} E(r_P) \cdot \vec{e}_{r_P} \cdot dS \cdot \vec{e}_{r_P} &= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon} \\ E(r) \int_{S_l} dS &= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot h = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon}}$$

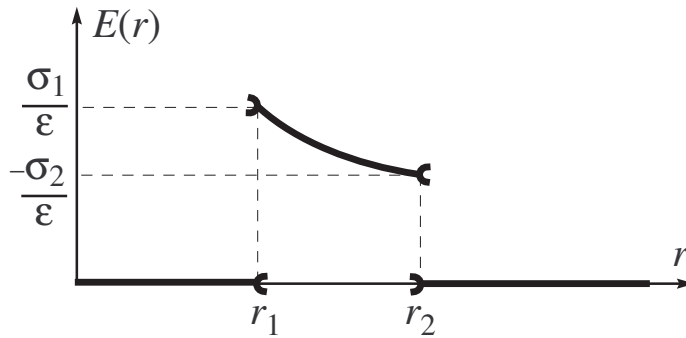
• **Cas** $r < r_1$: $Q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \vec{0}}$

• **Cas** $r_1 < r < r_2$: $Q_{\text{int}} = Q \cdot \frac{h}{l} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \cdot \frac{1}{r} \vec{e}_r}$

• **Cas** $r_2 < r < r_2 + e$: $Q_{\text{int}} = +Q \cdot \frac{h}{l} - Q \cdot \frac{h}{l} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \vec{0}}$

3) **Cas** $r > r_2 + e$: Comme les charges sont purement surfacique et qu'il n'y en a pas en $r = r_2 + e$: $Q_{\text{int}} = +Q \cdot \frac{h}{l} - Q \cdot \frac{h}{l} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \vec{0}}$

4)



5) • En $r = r_1$ se trouve une distribution surfacique de charges de densité $\sigma_1 = \frac{Q}{2\pi \cdot r_1 \cdot l}$.

À la traversée de cette surface chargée, il y a discontinuité de la composante normale du champ

électrique :
$$\vec{E}(r_1^+) - \vec{E}(r_1^-) = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \cdot \frac{1}{r_1} \vec{e}_r - \vec{0} = \frac{\sigma_1}{\epsilon} \cdot \vec{e}_r$$

• En $r = r_2$ se trouve une distribution surfacique de charges de densité $\sigma_2 = \frac{-Q}{2\pi \cdot r_2 \cdot l}$.

À la traversée de cette surface chargée, il y a discontinuité de la composante normale du champ

électrique :
$$\vec{E}(r_2^+) - \vec{E}(r_2^-) = \vec{0} - \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \cdot \frac{1}{r_2} \vec{e}_r = \frac{\sigma_2}{\epsilon} \cdot \vec{e}_r$$

• Comme la surface $r = r_2 + e$ n'est pas chargée, il y a continuité du champ électrique à sa traversée :
$$\vec{E}(r_2 + e^-) = \vec{E}(r_2 + e^+) = \vec{0}$$

• **Conclusion :** Dans les trois cas, on vérifie la relation de passage à la traversée d'une surface :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

6) Comme $\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}_M V$:

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = \int_2^1 \vec{\text{grad}}_M V \cdot d\vec{OM} = \int_2^1 -\vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} = \int_1^2 E(r) \vec{e}_r \cdot d\vec{OM}$$

On en déduit :
$$U_{12} = \int_1^2 E(r) \cdot dr = \int_1^2 \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \cdot \frac{1}{r} \cdot dr \Rightarrow U_{12} = \frac{Q}{2\pi \cdot \epsilon \cdot l} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

7) Comme $U_{12} = \frac{Q}{C}$, on en déduit :
$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{2\pi \cdot \epsilon \cdot l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = C_1 \cdot l \Rightarrow C_1 = \frac{C}{l} = \frac{2\pi \cdot \epsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

8) Comme $W_e = \frac{1}{2} \cdot C U_{12}^2$, on a :
$$W_e = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot l \cdot U_{12}^2 = \frac{\pi \cdot \epsilon \cdot l \cdot U_{12}^2}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

9)
$$C_1 = \frac{2\pi \cdot \epsilon}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi \times 8,85 \cdot 10^{-12} \times 2,0}{\ln\left(\frac{0,50}{0,15}\right)} \Rightarrow C_1 \simeq 92,4 \text{ pF}$$

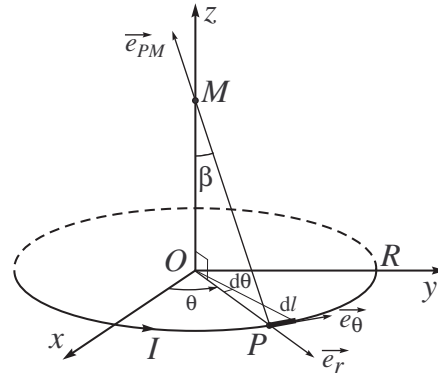
10)
$$W_e = \frac{1}{2} \cdot C_1 \cdot l \cdot U_{12}^2 = \frac{1}{2} \times 92,4 \cdot 10^{-12} \times 10 \times 10^2 \Rightarrow W_e = 4,62 \cdot 10^{-8} \text{ J}$$

II Bobine plate [d'après Banque PT 2009, Phys. B]

1) Loi de Biot et Savart :
$$\overrightarrow{dB_1(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{l} \times \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

2) • Les plans $(\Pi_1^*) = (Mxz)$ et $(\Pi_2^*) = (Myz)$ sont des plans d'antisymétrie des courants passant par M .
Le champ magnétique $\overrightarrow{B_1(M)}$ appartenant aux plans d'antisymétrie des courants passant par M , on a

$$\overrightarrow{B_1(M)} = B_1(M) \cdot \vec{e}_z$$



• Le théorème de superposition donne :
$$\overrightarrow{B_1(M)} = \oint_{(C)} d\overrightarrow{B_1(M)} = \oint_{(C)} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I d\vec{l} \times \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Soit, comme $PM = \frac{R}{\sin \beta}$ et \vec{e}_z uniformes :

$$\begin{aligned} B_1(M) = \overrightarrow{B_1(M)} \cdot \vec{e}_z &= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{1}{R^3} \cdot \left(\oint_{(C)} d\vec{l} \times \overrightarrow{PM} \right) \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{\sin^3 \beta}{R^3} \cdot \oint_{(C)} [(d\vec{l} \times \overrightarrow{PM}) \cdot \vec{e}_z] \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{\sin^3 \beta}{R^3} \cdot \oint_{(C)} [(\vec{e}_z \times dl \vec{e}_\theta) \cdot \overrightarrow{PM}] \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{\sin^3 \beta}{R^3} \cdot \oint_{(C)} [-dl \cdot \vec{e}_r \cdot (-R\vec{e}_r + z\vec{e}_z)] \\ &= \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{\sin^3 \beta}{R^3} \cdot \int_0^{2\pi} R^2 d\theta \\ &\Rightarrow \overrightarrow{B_1(M)} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2R} \cdot \sin^3 \beta \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

• Au point $M = O$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ soit :
$$\overrightarrow{B_1(O)} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2R} \cdot \vec{e}_z$$

3) • Puisque N spires jointives se répartissent sur une largeur $R_2 - R_1$, dN spires vont se répartir sur une largeur dr (entre r et $r + dr$) avec la densité surfacique $n = \frac{N}{R_2 - R_1} = \frac{dN}{dr}$.

Soit :
$$dN = \frac{N}{R_2 - R_1} \cdot dr$$

• Ces dN spires ont quasiment toutes le même rayon r .

Elles créent donc en O le champ élémentaire :
$$d\overrightarrow{B(O)} = \frac{\mu_0 \cdot dN \cdot I}{2r} \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2(R_2 - R_1)} \cdot \frac{dr}{r} \cdot \vec{e}_z$$

4) On en déduit le champ $\overrightarrow{B(O)}$ produit par toute la bobine au point O :

$$\overrightarrow{B(O)} = \int_{R_1}^{R_2} d\overrightarrow{B(O)} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2(R_2 - R_1)} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \cdot \vec{e}_z \Rightarrow \text{soit : } \overrightarrow{B(O)} = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2(R_2 - R_1)} \cdot \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right) \cdot \vec{e}_z$$

5)
$$B(O) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times 250 \times 0,01}{2(0,3 - 0,2)} \cdot \ln \left(\frac{0,3}{0,2} \right) \Rightarrow B(O) \simeq 6,4 \mu T$$

Chimie : Structures cristallines

III La galène [d'après E3A PC, 2003]

1) $n.o.(Pb) = +II$ et $n.o.(S) = -II$.

2) • Localisation des sites octaédriques dans un réseau c.f.c. :

- un site au centre du cube
- un site au milieu de chaque arête du cube

• Nombre de sites octaédriques par maille conventionnelle c.f.c. : $N_T = 1 \times 1 + 12 \times \frac{1}{4} = 4$

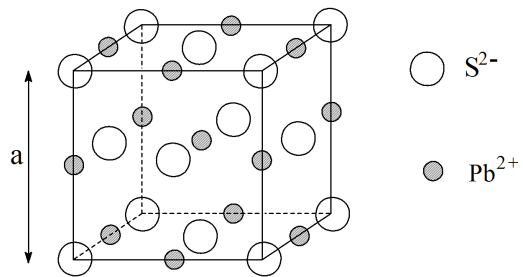
3) Puisque la galène PbS cristallise comme $NaCl$, les ions S^{2-} constituent un réseau c.f.c. de paramètre a et dont tous les sites octaédriques (pour respecter l'électronéutralité du cristal) sont occupés par les ions Pb^{2+} .

Dans la maille c.f.c. : $Z = 4$ motifs PbS par maille.

4) Puisque la condition de tangence (dans le modèle des « sphères dures ») entre anion et cation a lieu le long d'une arête : $a = 2.r_+ + 2r_-$

Soit : $r_- = \frac{a}{2} - r_+ = 165,5 \text{ pm} \simeq 166 \text{ pm}$

5)
$$\rho = \frac{Z(PbS).M(PbS)}{a^3.N_a} = \frac{4 \times 239,2 \cdot 10^{-3}}{(595 \cdot 10^{-12})^3 \times 6,02 \cdot 10^{23}} = 7,54 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$



IV Solides ioniques LiCl et KCl [d'après CCP PC, Chim. 2, 2003]

1) • Les structures ioniques possibles sont de trois type possibles (→ Cf Cours) :

- type $CsCl$: coordinence 8/8 avec $\frac{r_+}{r_-} > \sqrt{3} - 1 \simeq 0,732$
- type $NaCl$: coordinence 6/6 avec $\frac{r_+}{r_-} > \sqrt{2} - 1 \simeq 0,414$
- type ZnS : coordinence 4/4 avec $\frac{r_+}{r_-} > \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \simeq 0,225$

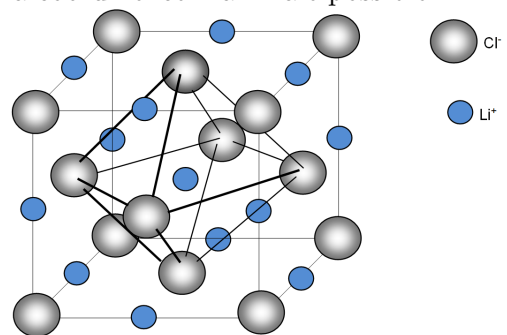
Sachant qu'une structure ionique se forme a priori pour la coordinence maximale possible.

2) Or, pour $LiCl$, $\frac{r_+}{r_-} = 0,54$.

→ La structure est donc de type $NaCl$.

3) Mais pour KCl , $\frac{r_+}{r_-} = 0,91$. la structure la plus stable possible est de type $CsCl$, mais une structure de coordinence inférieure reste possible.

→ Il est donc compréhensible que KCl cristallise selon le type $NaCl$ comme $LiCl$.

4) • Il est possible de dissoudre $LiCl$ dans KCl car Li^+ est plus petit que K^+ .

Comme $R(Li^+) < R(K^+)$:

- il n'y aura aucune déformation du réseau suite à la substitution d'ion K^+ par des ions Li^+ .
- la structure présentera des vides et des absences de contact entre ions opposés et sera donc moins stable — mais elle pourra exister.

• Par contre, la dissolution de KCl dans $LiCl$ est impossible car K^+ est plus gros que Li^+ . Les ions K^+ ne pourront pas rentrer dans le site octaédrique défini par le réseau en anion Cl^- et la condition de contact imposé entre Li^+ et Cl^- .