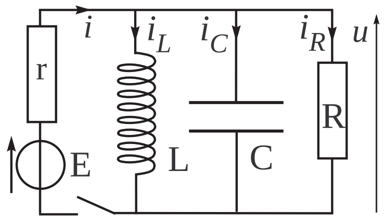
DM n°1 – Circuit RLC parallèle

Réponse à un échelon de tension [pour le Lu 05/10/09]

Sur le schéma du montage ci-contre, le générateur de tension est idéal, de *f.é.m.* E constante. Les résistors sont linéaires, de résistances R et r constantes.
Tant que l'interrupteur est ouvert, le condensateur, de capacité C, est déchargé et la bobine idéale, d'inductance L, n'est parcourue par un aucun courant. À $t = 0$, l'interrupteur est fermé instantanément et on cherche à déterminer l'évolution ultérieure du réseau électrique.



1) Déterminer, par un raisonnement physique simple (pratiquement sans calcul), la tension u et les intensités i, i_L, i_C et i_R dans les quatre branches :

a) juste après la fermeture de l'interrupteur (instant $t = 0^+$),

b) au bout d'une durée très grande ($t \to \infty$).

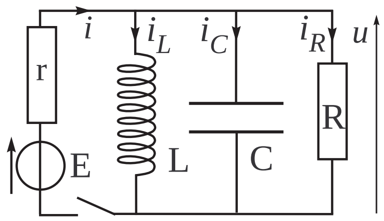
2) Établir l'équation différentielle liant i_R à ses dérivées par rapport au temps t.

3) Écrire l'équation différentielle sous sa forme canonique. Exprimer son facteur de qualité et sa pulsation propre en fonction des données du problème (L, C, R et r).

DM n°1 – Circuit RLC parallèle

Réponse à un échelon de tension [pour le Lu 05/10/09]

Sur le schéma du montage ci-contre, le générateur de tension est idéal, de *f.é.m.* E constante. Les résistors sont linéaires, de résistances R et r constantes.
Tant que l'interrupteur est ouvert, le condensateur, de capacité C, est déchargé et la bobine idéale, d'inductance L, n'est parcourue par un aucun courant. À $t = 0$, l'interrupteur est fermé instantanément et on cherche à déterminer l'évolution ultérieure du réseau électrique.



1) Déterminer, par un raisonnement physique simple (pratiquement sans calcul), la tension u et les intensités i, i_L, i_C et i_R dans les quatre branches :

a) juste après la fermeture de l'interrupteur (instant $t = 0^+$),

b) au bout d'une durée très grande ($t \to \infty$).

2) Établir l'équation différentielle liant i_R à ses dérivées par rapport au temps t.

3) Écrire l'équation différentielle sous sa forme canonique. Exprimer son facteur de qualité et sa pulsation propre en fonction des données du problème (L, C, R et r).

Solution DM n°1

Avant de se lancer dans la résolution, posons la la loi des nœuds et les relations qui existent entre les grandeurs électriques dans chaque branche (relations valables à chaque instant, $t \leq 0$ ou $t \geq 0$) :

$\boxed{i = i_L + i_C + i_R}$ ① $\boxed{u = u_R = Ri_R}$ ② $\boxed{u = u_C = \dfrac{q}{C}}$ avec : $\boxed{i_C = \dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$ ③

$\boxed{u = u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}}$ ④ $\boxed{u = E - ri}$ ⑤

1.a) • Comme **l'intensité traversant une bobine est une fonction continue du temps** et que la bobine n'est parcourue par aucun courant pour $t < 0$: $\boxed{i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0}$.

• Comme **la charge aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps** et que le condensateur est déchargé pour $t < 0$: $\boxed{u(0^+) = \dfrac{q(0^+)}{C} = \dfrac{q(0^-)}{C} = 0}$.

• Par ailleurs $\boxed{i_R(0^+) = \dfrac{u(0^+)}{R} = 0}$.

• Enfin ① $\xrightarrow[\text{comme } u(0^+)=0]{⑤}$ $\boxed{i_C(0^+) = i(0^+) = \dfrac{E}{r}}$

1.b) Lorsque le régime permanent continu est établi, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine se comporte comme un simple fil.

D'où $\boxed{i_C(\infty) = 0}$ et $\boxed{u(\infty) = 0}$.

Ce qui entraîne $\boxed{i_R(\infty) = 0}$ et $\boxed{i(\infty) = \dfrac{E}{r}}$.

La loi des nœuds donne enfin $\boxed{i_L(\infty) = i(\infty) = \dfrac{E}{r}}$

2) Méthodologie : On cherche l'équation différentielle vérifiée par i_R.
Il faut donc exprimer tous les autres courants dans la loi des nœuds en fonction de i_R seulement.
Or, les relations ③, ④ et ⑤ montre qu'on peut facilement exprimer ces intensités en fonction de u, laquelle s'exprime à son tour facilement en fonction de i_R.
Puisque ④ met en jeu la dérivée de i_L par rapport au temps, on dérive ① par rapport au temps :

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}$$

qui devient, grâce à ③, ④ et ⑤ :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(E-u)}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L} + C\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t}$$

Enfin, puisque $u = Ri_R$, on obtient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i_R}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i_R = 0} \quad (\star)$$

3) L'équation différentielle d'ordre 2 qui s'écrit **sous sa forme canonique** :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i_R}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i_R}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i_R = 0} \quad (\star)$$

avec, par identification :

- $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ **la pulsation propre** du circuit
- et $\boxed{Q = R_0 C\omega_0}$ son **facteur de qualité** ; en posant $\boxed{R_0 = r//R = \dfrac{rR}{r+R}}$