

DM28 . Moteur et détente de l'hélium

I Cycle moteur [Véto 2001]

Attention : une grande attention sera portée à la qualité des applications numériques (les donner avec 3 ou 4 chiffres significatifs)

Un moteur ditherme fonctionne entre deux thermostats selon un cycle constitué de deux transformations adiabatiques réversibles et de deux transformations isochores. Les températures des thermostats sont T_{FR} (source froide) et T_{CH} (source chaude) avec $T_{FR} < T_{CH}$. Le cycle est décrit par n moles de gaz supposé parfait de capacité thermique molaire à volume constant C_{Vm} constante. Pour ce gaz, le rapport γ de la capacité thermique molaire à pression constante C_{Pm} et de C_{Vm} est égal à 1,4.

Les différentes transformations du cycle sont :

- $A \rightarrow B$: compression adiabatique réversible de durée Δt ;
- $B \rightarrow C$: compression isochore par contact du gaz avec la source chaude par l'intermédiaire des parois du cylindre qui le contient pendant une durée Δt_1 ;
- $C \rightarrow D$: détente adiabatique réversible de durée Δt ;
- $D \rightarrow A$: détente isochore par contact du gaz avec la source froide par l'intermédiaire des parois du cylindre qui le contient pendant une durée Δt_2 .

On ne tiendra pas compte de la capacité thermique du cylindre contenant le gaz.

Chaque grandeur pression P , volume V et température T du gaz en un point du cycle sera indiquée par la lettre de ce point.

On notera α le rapport volumétrique $\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C} = \alpha$.

Données : $T_{FR} = 350 \text{ K}$; $T_{CH} = 1100 \text{ K}$; $\alpha = 10$.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$; $n = 0,05 \text{ mol}$.

$\Delta t = 1,00.10^{-2} \text{ s}$; $\Delta t_1 = 4,43.10^{-2} \text{ s}$; $\Delta t_2 = 3,45.10^{-2} \text{ s}$.

1) Établir la relation de Mayer. En déduire les expressions de C_{Vm} et C_{Pm} en fonction de R et de γ .

A.N. : calculer C_{Pm} et C_{Vm} .

2) Montrer que pour une transformation isentropique réversible d'un gaz parfait de rapport γ constant, on a la relation $PV^\gamma = \text{Cte}$.

En déduire l'expression littérale de T_B en fonction de T_A , α et γ , ainsi que celle de T_D en fonction de T_C , α et γ .

A.N. : calculer T_B et T_D sachant que $T_A = 390 \text{ K}$ et $T_C = 1000 \text{ K}$.

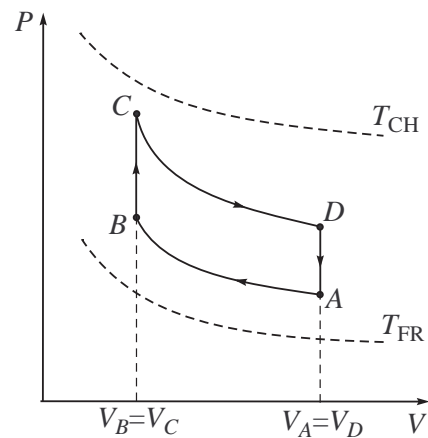
3) Déterminer, en fonction de n , R , T_A , T_C , α et γ , les expressions littérales :

- du transfert thermique Q_C reçu par le gaz, pendant la durée du cycle, de la part de la source chaude ;

- du transfert thermique Q_F reçu par le gaz, pendant la durée du cycle, de la part de la source froide.

A.N. : calculer Q_C et Q_F .

4) Déterminer, en fonction de n , R , T_A , T_C , α et γ , l'expression littérale du travail W reçu par



le gaz pendant la durée d'un cycle.

Quelle est la puissance moyenne \mathcal{P} de ce moteur ?

A.N. : calculer W et \mathcal{P} .

5) Définir le rendement η de ce cycle moteur. Déterminer l'expression littérale de η en fonction uniquement de α et de γ .

A.N. : calculer η .

6) Démontrer l'expression littérale de la valeur maximale η_{\max} du rendement prévue par le théorème de Carnot ?

A.N. : calculer η_{\max} . Comparer η et η_{\max} . Que peut-on en conclure ?

7) Déterminer, en fonction de n , R , T_A , T_C , α et γ , les expressions littérales ΔS_{AB} , ΔS_{BC} , ΔS_{CD} et ΔS_{DA} , de la variation d'entropie du gaz pour les quatre transformations du cycle.

A.N. : calculer ΔS_{DA} et ΔS_{BC} .

8) Quelle est la variation d'entropie du gaz au cours d'un cycle ?

9) Déterminer, en fonction de n , R , T_A , T_C , T_{CH} , α et γ , la variation d'entropie ΔS_{CH} de la source chaude.

A.N. : calculer ΔS_{CH} .

10) Déterminer, en fonction de n , R , T_A , T_C , T_{FR} , α et γ , la variation d'entropie ΔS_{FR} de la source froide.

A.N. : calculer ΔS_{FR} .

11) Quelle est la variation d'entropie ΔS_{∞} , au cours d'un cycle, du système constitué de l'ensemble des sources de chaleur et du gaz ?

A.N. : calculer ΔS_{∞} . Commenter le résultat.

12) Que les transferts thermiques aient lieu avec l'une ou l'autre des sources, on suppose que, à partir de l'instant t et pendant une durée infinitésimale dt , ils sont de la forme :

$$\begin{cases} \delta Q_C = \lambda(T_{CH} - T(t)).dt & \text{au cours de la transformation } B \rightarrow C \\ \delta Q_F = \lambda(T_{FR} - T(t)).dt & \text{au cours de la transformation } D \rightarrow A \end{cases}$$

$T(t)$ étant la température du gaz, supposée uniforme, à la date t et λ une constante positive. On prendra $\lambda = 4,5 \text{ uSI}$.

12.a) Quelle est l'unité de λ , exprimée en fonction des unités de travail, de température et de temps du système international ?

12.b) Quelle est l'unité de λ , exprimée en fonction des unités fondamentales du système international ?

13) On pose $\tau = \frac{nC_{Vm}}{\lambda}$. Déterminer la relation entre T_{FR} , T_A , T_D , τ et Δt_2 . Quelle est l'unité fondamentale de τ ? Que représente τ ?

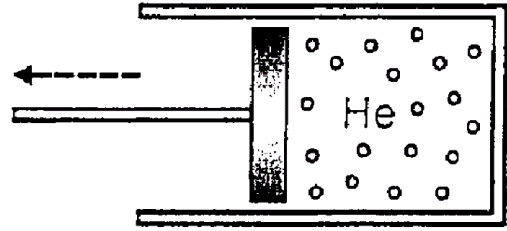
14) Déterminer la relation entre T_{CH} , T_B , T_C , τ et Δt_1 .

15) Déterminer les valeurs limites $T_{A,\lim}$ et $T_{C,\lim}$ de T_A et T_C lorsque Δt_1 et Δt_2 tendent vers l'infini.

16) Représenter le cycle moteur étudié dans le diagramme entropique en justifiant théoriquement les allures des courbes représentatives de chaque transformation. Y faire également apparaître les isothermes T_{CH} et T_{FR} .

II Détente de l'hélium [ENAC 2006, q. 19-24]

Une enceinte cylindrique fermée par un piston, mobile sans frottement, contient 500 g d'hélium gazeux, monoatomique, de masse molaire $M = 4 \text{ g.mol}^{-1}$. Dans l'état (1) initial, le volume de l'enceinte est $V_1 = 100 \text{ L}$, et le gaz, supposé parfait, est à la température $T_1 = 600 \text{ K}$.



On rappelle que l'énergie interne de n moles de gaz parfait monoatomique à la température T s'écrit :

$$U = \frac{3}{2}nRT, \text{ où } R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} \text{ désigne la constante des gaz parfaits.}$$

1) Calculer la capacité thermique massique à volume constant c_V de l'hélium :

- A) $c_V = 1,38 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ B) $c_V = 2,91 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$
 C) $c_V = 3,12 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ D) $c_V = 5,19 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$

2) Par déplacement du piston, le gaz subit une détente isotherme, supposée réversible, qui le conduit à l'état (2) caractérisé par un volume $V_2 = 250 \text{ L}$.

Calculer la pression P_2 du gaz dans ce nouvel état :

- A) $P_2 = 2,49.10^6 \text{ Pa}$ B) $P_2 = 2,49.10^3 \text{ Pa}$
 C) $P_2 = 9,97.10^6 \text{ Pa}$ D) $P_2 = 9,97.10^3 \text{ Pa}$

3) Quel est le travail W_{12} reçu par le gaz au cours de cette évolution isotherme ?

- A) $W_{12} = -2280 \text{ kJ}$ B) $W_{12} = -571 \text{ kJ}$
 C) $W_{12} = 571 \text{ kJ}$ D) $W_{12} = 2280 \text{ kJ}$

4) On envisage une nouvelle évolution réversible, constituée d'une détente adiabatique entre l'état (1) et un état intermédiaire (3) de volume $V_3 = V_2$, suivie d'un chauffage isochore entre l'état (3) et l'état final (2), défini précédemment. Déterminer la température T_3 de l'état intermédiaire :

- A) $T_3 = 326 \text{ K}$ B) $T_3 = 416 \text{ K}$ C) $T_3 = 866 \text{ K}$ D) $T_3 = 1105 \text{ K}$

5) Calculer le travail W_{132} reçu par le gaz au cours des évolution successives : (1) \rightarrow (3) \rightarrow (2) :

- A) $W_{132} = -287 \text{ kJ}$ B) $W_{132} = -427 \text{ kJ}$
 C) $W_{132} = 414 \text{ kJ}$ D) $W_{132} = 787 \text{ kJ}$

6) Déterminer la variation d'entropie ΔS du gaz entre l'état (1) et l'état (2) :

- A) $\Delta S = -3807 \text{ J.K}^{-1}$ B) $\Delta S = -952 \text{ J.K}^{-1}$
 C) $\Delta S = 952 \text{ J.K}^{-1}$ D) $\Delta S = 0 \text{ J.K}^{-1}$

7) Représenter dans le diagramme de WATT les trois états thermodynamiques ((1), (2) et (3)) ainsi que les courbes des trois évolutions étudiées ((1) \rightarrow (2), (1) \rightarrow (3) et (3) \rightarrow (2)). On prendra soin de faire apparaître P_1 , P_2 , V_1 et V_2 .

8) Établir, pour un état intermédiaire $\{S, T\}$ de la transformation isochore réversible entre (3) et (2), l'expression donnant la température T en fonction de l'entropie S , de S_1 , de T_3 et de C_V (capacité thermique à volume constant).

9) Représenter dans le diagramme entropique les trois états thermodynamiques ainsi que les courbes des trois évolutions étudiées. On prendra soin de faire apparaître T_1 , T_3 , S_1 et S_2 .

Solution

I. Cycle moteur – 1) → Cf Cours : $C_{Pm} - C_{Vm} = R$ (relation de Mayer, pour un GP).

$$C_{Pm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} = 29,10 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} \quad \text{et} \quad C_{Vm} = \frac{R}{\gamma - 1} = 20,78 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}.$$

2) Une transformation isentropique réversible étant une transformation quasi-statique, à entropie constante, on peut appliquer la première identité thermodynamique, pour un gaz parfait (vérifiant donc la première loi de Joule) :

$$dS = \begin{cases} 0 \\ \frac{dU_{GP} + PdV}{T} = nC_{Vm} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = \frac{nR}{\gamma - 1} (d \ln T + (\gamma - 1) d \ln V) \quad \textcircled{*} \end{cases}$$

On en déduit une des trois relations de Laplace pour un gaz parfait subissant une isentropique réversible (=adiabatique réversible) : $TV^{\gamma-1} = \text{Cte}$; soit, puisque $PV = nRT$: $PV^{\gamma} = \text{Cte}$

$$\text{Donc, } \begin{cases} \text{comme } T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}, & \text{on en déduit : } T_B = T_A \alpha^{\gamma-1} = 979,6 \text{ K} \\ \text{et comme } T_D V_D^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}, & \text{on en déduit : } T_D = T_C \alpha^{1-\gamma} = 398,1 \text{ K} \end{cases}$$

3) La transformation $B \rightarrow C$ étant une isochore et concernant un gaz parfait (qui vérifie donc la première loi de Joule) : $Q_C = Q_{B \rightarrow C, V} = \Delta U_{B \rightarrow C, GP} = nC_{Vm}(T_C - T_B)$ soit :

$$Q_C = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_C - T_A \alpha^{\gamma-1}) = 21,16 \text{ J}$$

De même : $Q_F = Q_{D \rightarrow A, V} = \Delta U_{D \rightarrow A, GP} = nC_{Vm}(T_A - T_D)$ soit :

$$Q_F = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_A - T_C \alpha^{1-\gamma}) = -8,43 \text{ J}$$

4) D'après le premier principe de la Thermodynamique appliqué au gaz subissant un cycle, l'énergie interne étant fonction d'état : $\Delta U = \begin{cases} 0 \\ W + Q_C + Q_F \end{cases}$ soit : $W = -Q_C - Q_F$, d'où :

$$W = \frac{nR}{\gamma - 1} [T_A (\alpha^{\gamma-1} - 1) + T_C (\alpha^{1-\gamma} - 1)] = -12,74 \text{ J} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \frac{W}{2\Delta t + \Delta t_1 + \Delta t_2} = -128,9 \text{ W}$$

$$5) \quad \eta = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur investie}} = -\frac{W}{Q_C}$$

Soit, d'après le premier principe : $\eta = 1 + \frac{Q_F}{Q_C}$, ce qui conduit à : $\eta = 1 - \alpha^{1-\gamma} = 60,2\%$

6) → Cf Cours : Pour le cycle de Carnot entre deux thermostats T_{CH} et T_{FR} le rendement s'écrit :

$$\eta_{\max} = 1 - \frac{T_{FR}}{T_{CH}} = 68,2\%$$

Commentaire : $\eta_{\max} > \eta$. On vérifie que le cycle réel est un cycle irréversible et que le cycle de Carnot correspond au rendement maximal d'un cycle moteur fonctionnant entre les deux thermostats considérés.

7) • $\Delta S_{AB} = \Delta S_{CD} = 0$ (transformations isentropiques)

• La transformation $B \rightarrow C$ étant une isochore

- concernant un gaz parfait (qui vérifie donc la première loi de Joule)

- quasi-statique (puisque représentable dans le diagramme de Clapeyron),

on peut appliquer Première Identité Thermodynamique $\textcircled{*}$.

$$\text{On obtient : } \Delta S_{BC} = \int_B^C dS = \int_B^C nC_{Vm} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_C}{T_B} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_C}{T_A \alpha^{\gamma-1}} \right)$$

$$\Delta S_{BC} = nR \left[\frac{1}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_C}{T_A} \right) - \ln \alpha \right] = 2,138 \cdot 10^{-2} \text{ J.K}^{-1}$$

De même, pour la transformation $D \rightarrow A$, on a : $\Delta S_{DA} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_A}{T_C \alpha^{1-\gamma}} \right)$

$$\Delta S_{DA} = nR \left[\frac{1}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_A}{T_C} \right) + \ln \alpha \right] = -2,138 \cdot 10^{-2} \text{ J.K}^{-1}$$

8) Par propriété d'une fonction d'état, sur un cycle : $\Delta S = S_A - S_A = 0$

Les expressions littérales précédents permettent de le vérifier puisque :

$$\Delta S = \cancel{\Delta S_{A \rightarrow B}} + \cancel{\Delta S_{B \rightarrow C}} + \cancel{\Delta S_{C \rightarrow D}} + \cancel{\Delta S_{D \rightarrow A}} = 0$$

9) Puisqu'un thermostat subit une transformation réversible, par application du deuxième principe :

$$\Delta S_{CH} = \epsilon S_{CH} = \frac{Q_{SC}}{T_{CH}} = -\frac{Q_C}{T_{CH}} = \frac{nR}{\gamma - 1} \cdot \frac{T_A \alpha^{\gamma-1} - T_C}{T_{CH}} = -1,924 \cdot 10^{-2} \text{ J.K}^{-1}$$

10) De même :
$$\Delta S_{FR} = \epsilon S_{FR} = \frac{Q_{SF}}{T_{FR}} = -\frac{Q_F}{T_{FR}} = \frac{nR}{\gamma - 1} \cdot \frac{T_C \alpha^{1-\gamma} - T_A}{T_{FR}} = 2,407 \cdot 10^{-2} \text{ J.K}^{-1}$$

11) L'entropie étant une fonction d'état extensive, elle est également, en thermodynamique classique, additive. Donc :

$$\Delta S_{\infty} = \cancel{\Delta S} + \Delta S_{FR} + \Delta S_{CH} = 4,83 \cdot 10^{-3} \text{ J.K}^{-1}$$

Commentaire : On vérifie que le cycle étudié est irréversible puisque $\Delta S_{\infty} = \cancel{\epsilon S_{\infty}} + \epsilon S_{\infty} > 0$.

12)
$$u(\lambda) = \text{J.K}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = \text{kg.m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$$

13) $\delta Q_F = \delta Q_{F,V} = dU_{GP} = nC_{Vm}dT = \lambda(T_{FR} - T).dt$, soit : $\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_{FR}}{\tau}$ ou encore :

$$\int_{T_D}^{T_A} \frac{nC_{Vm}}{\lambda} \cdot \frac{dT}{T_{FR} - T} = \int_0^{\Delta t_2} dt \Leftrightarrow -\tau \ln \left(\frac{T_{FR} - T_A}{T_{FR} - T_D} \right) = \Delta t_2 \Leftrightarrow \Delta t_2 = \tau \ln \left(\frac{T_D - T_{FR}}{T_A - T_{FR}} \right)$$

Commentaire : L'équation différentielle qu'on a pu écrire fait apparaître $\tau = \frac{nC_{Vm}}{\lambda}$ comme

homogène à un temps (unité : la seconde), plus précisément il s'agit de la **durée caractéristique** de la transformation étudiée.

14) De même $\delta Q_C = nC_{Vm}dT = \lambda(T_{CH} - T).dt$, soit :
$$\Delta t_1 = \tau \ln \left(\frac{T_{CH} - T_B}{T_{CH} - T_C} \right)$$

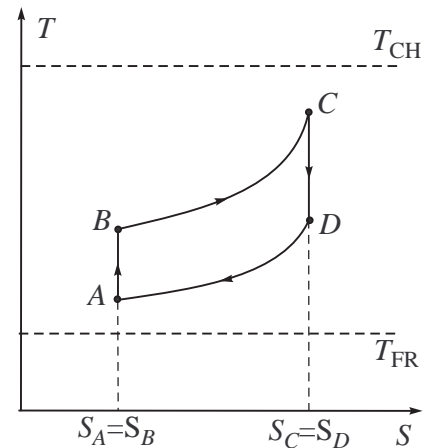
15) $T_{A,lim} = T_{RF}$ et $T_{C,lim} = T_{CH}$

16) La première identité thermodynamique pour une **TéQS** isochore d'un GP s'écrit :

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{PdV}{T} = C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V}, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} T = T_B \exp \left(\frac{S - S_B}{nC_{Vm}} \right) = K \exp \left(\frac{S}{C_V} \right) & \text{pour } B \rightarrow C \\ T = T_D \exp \left(\frac{S - S_D}{nC_{Vm}} \right) = K' \exp \left(\frac{S}{C_V} \right) & \text{pour } D \rightarrow A \end{cases}$$

Ainsi, les courbes représentatives de transformations isochores sont des portions d'exponentielles croissantes dans le diagramme entropique.



II. Détente de l'hélium – Rq : $n = \frac{m}{M} = 125 \text{ mol}$

1) $U = \frac{3}{2} \cdot nRt = C_V \cdot T$ (1^e loi de Joule) \Rightarrow d'où $C_V = m \cdot c_V = \frac{3}{2} \cdot nR$

Soit : $c_V = \frac{C_V}{m} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{M} = 3,12 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ **Rép. 1.C)**

2) $P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{m}{M} \cdot \frac{RT_1}{V_2} = 24,9 \text{ bar} = 2,49 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ **Rép. 2.A)**

3) $W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \delta W = \int_1^2 -P_{\text{ext}} \cdot dV = \text{(a)} \int_1^2 -P \cdot dV = \text{(b)} \int_1^2 -\frac{nRT}{V} \cdot dV = \text{(c)} -nRT_1 \int_1^2 \frac{dV}{V}$

(a) : TQS* car réversible, donc $P_{\text{ext}} = P$

(b) : car GP

(c) : car isotherme $T = \text{Cte} = T_1$

Soit $W_{12} = -nRT_1 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -P_2 V_2 \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = -571 \text{ kJ}$ **Rép. 3.B)**

4) • Pour un Gaz Parfait Monoatomique, connaissant la Relation de Mayer :

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + nR}{C_V} = \frac{\frac{5}{2}nR}{\frac{3}{2}nR} = \frac{5}{3} \simeq 1,67$$

• Pour la transformation (1) \rightarrow (3), le système étant un Gaz Parfait subissant une adiabatique réversible (donc isentropique), on peut lui appliquer les lois de Laplace, soit : $TV^{\gamma-1} = \text{Cte}$,
i.e. : $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$

D'où : $T_3 = \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma-1} \cdot T_1 = 326 \text{ K}$ **Rép. 4.A)**

5) $W_{132} = W_{13} + W_{32}$, avec :

$$\begin{cases} W_{32} = \int_3^2 \delta W = \int_3^2 -P_{\text{ext}} \cdot dV = 0 \text{ isochore} & \text{(a) : 1^e Principe + adiabatique} \\ W_{13} = \text{(a)} \Delta U_{13} - Q_{13} = \text{(b)} C_V \cdot (T_3 - T_1) = \text{(c)} \frac{3}{2} \cdot nR \cdot (T_3 - T_1) & \text{(b) : GP et 1^e loi de Joule} \\ & \text{(c) : GPM} \end{cases}$$

Donc : $W_{132} = W_{13} = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot (T_3 - T_1) = -427 \text{ kJ}$ **Rép. 5.B)**

6) $\Delta S = \Delta S_{\text{rév}} = \int_1^2 dS_{\text{rév}} = \text{(a)} \int_1^2 \frac{dU + P \cdot dV}{T} = \text{(b)} \int_1^2 \frac{C_V \cdot dT}{T} + \int_1^2 \frac{nR \cdot dV}{V} = \frac{3}{2} \cdot nR \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$

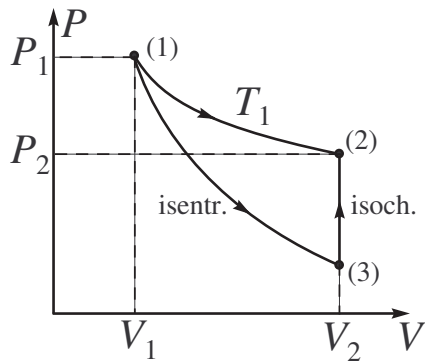
Car :

(a) : 1^e Identité Thermodynamique

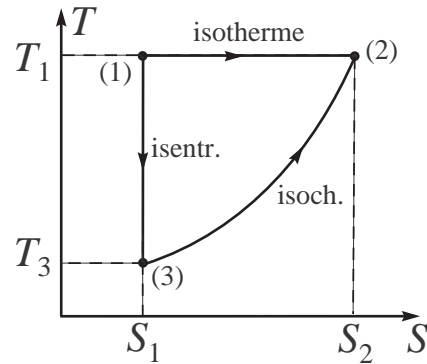
(b) : 1^e loi de Joule et Équation d'état d'un GP

D'où : $\Delta S_{1 \rightarrow 2} = nR \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 952 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ **Rép. 6.C)**

7)



9)



8) • Pour une transformation isochore élémentaire, la 1^e Identité Thermodynamique donne, pour un GP vérifiant la 1^e loi de Joule : $dS = \frac{dU + P.dV}{T} = C_V \frac{dT}{T}$

• Donc, en sommant entre l'état (3) $\{S_3, T_3\}$ et un état thermodynamique intermédiaire $\{S, T\}$ sur l'isochore réversible (3) \rightarrow (2), on obtient : $S - S_3 = C_V \cdot \ln \left(\frac{T}{T_3} \right)$

Or, comme $S_3 = S_1$ ((1) \rightarrow (3) est une adiabatique réversible, donc une isentropique), on

obtient : $T = T_3 \cdot \exp \left(\frac{S - S_1}{C_V} \right)$