

DM24 . Anneau sur un cerceau

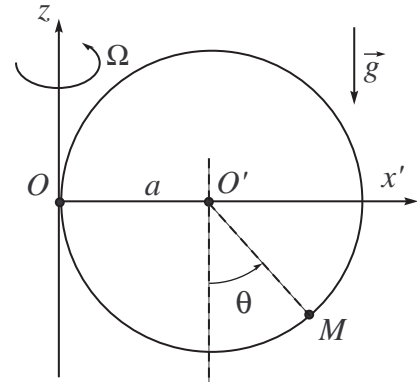
[CCP TSI 01 — <http://cortial.net/fichiers/>]

Un cerceau est assimilable à un cercle de centre O' et de rayon a . Situé dans un plan vertical $(x'Oz)$, il tourne autour d'une de ses tangentes verticales (Oz) à la vitesse angulaire Ω constante.

Un anneau assimilé à un point matériel M de masse m est mobile sans frottement sur ce cerceau.

On note θ l'angle que fait $O'M$ avec la verticale descendante passant par O' et compté positivement dans le sens trigonométrique.

On note \mathcal{R} le référentiel galiléen $(Oxyz)$ et \mathcal{R}' le référentiel $O'x'y'z$ lié au cerceau.



I - Utilisation du principe fondamental de la dynamique :

- 1) Écrire le principe fondamental de la dynamique dans \mathcal{R}' . On notera \vec{F}_{ie} , \vec{F}_C et \vec{R} respectivement les forces d'inertie d'entraînement, de Coriolis et la réaction du cerceau sur M .
- 2) Établir l'expression de \vec{F}_{ie} et montrer que cette force est colinéaire à $\vec{e}_{x'}$.
- 3) Établir l'expression de \vec{F}_C et montrer que cette force est colinéaire à $\vec{e}_{y'}$.
- 4) En déduire que l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme : $a\ddot{\theta} = f(\theta)$.
- 5) Donner l'expression des composantes de la réaction du cerceau dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_\theta)$.

II - Utilisation du théorème du moment cinétique :

- 1) Définir le moment cinétique du point M en O' dans le référentiel \mathcal{R}' et donner son expression.
- 2) Exprimer le théorème du moment cinétique dans le référentiel \mathcal{R}' .
- 3) En déduire l'équation du mouvement.
- 4) Peut-on obtenir par ce théorème les expressions des composantes de la réaction du cerceau ? Si oui, donner les expressions correspondantes.

III - Utilisation de l'énergie mécanique

- 1) Montrer que la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p_{ie}}$ dont on donnera l'expression.
- 2) Exprimer l'énergie potentielle \mathcal{E}_{p_g} dont dérive le poids.
- 3) Les autres forces dérivent-elles d'une énergie potentielle ? Justifier la réponse. En déduire l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\theta)$ du point M en prenant $\mathcal{E}_p(\theta = 0) \equiv 0$.
- 4) Justifier le fait qu'on puisse appliquer la conservation de l'énergie mécanique.
- 5) Retrouver l'équation du mouvement par la conservation de l'énergie mécanique.

IV - Étude de l'équilibre relatif

- 1) Établir que l'équation donnant les positions d'équilibre est : $a\Omega^2(1 + \sin \theta) = g \tan \theta$
- 2) Montrer par un raisonnement graphique que cette équation admet deux solutions. On précisera l'intervalle auquel elles appartiennent.
- 3) On désire qu'une position d'équilibre existe pour $\theta = \frac{\pi}{6}$. Calculer la valeur de la vitesse angulaire de rotation correspondante.
- 4) Cette position d'équilibre est-elle stable ?