DM21 • Satellite géostationnaire

Le mouvement des satellites artificiels de la Terre est étudié dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ *supposé galiléen. Ce référentiel a pour origine le centre* O *et ses axes sont orientés dans la direction de trois étoiles éloignées fixes. Dans le référentiel géocentrique, la Terre tourne autour de son axe avec une période de révolution* T *et une vitesse angulaire* Ω.

On désignera par M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre. $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle.

Données : $T = 86\,164\ s$; $M_T = 5,98.10^{24}\ kg$; $R_T = 6\,370\ km$; $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$.

Un satellite artificiel M de masse m est en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. Les frottements dus à l'atmosphère sur le satellite sont négligés.

1) Montrer qu'un satellite artificiel en orbite circulaire autour de la Terre a nécessairement une trajectoire plane contenant le centre O de la Terre.

Méthode : Étude systématique d'un problème de mécanique : cas de mouvement à *force centrale*.

- **Définir le système étudié.**
- **Choisir le référentiel d'étude.**
- **Bilan des forces appliquées au système.**

$\hookrightarrow$ Le système est-il **conservatif** ?

Dit autrement, les forces appliquées au système dérivent-elles d'énergies potentielles ? Lesquelles ?

$\hookrightarrow$ Le mouvement est-il à *force* **centrale** *conservative* ?

Auquel cas, l'étude d'un tel mouvement est systématique :

◦ Établir la **conservation du moment cinétique** : montrer que le mouvement a lieu dans un **plan fixé** par les conditions initiales sur la position et la vitesse du système, et obéit à **la loi des aires**.

◦ Établir la **conservation de l'énergie mécanique**.

2) Démontrer que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme et exprimer littéralement sa vitesse v_0. On exprimera d'abord v_0 en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r, puis en fonction de g_0, R_T et r, où g_0 désigne l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre.

Le satellite **SPOT** (Satellite sPécialisé dans l'Observation de la Terre) est en orbite circulaire à l'altitude $h = 832\ km$ au-dessus de la Terre. Calculer numériquement la vitesse v_0 de **SPOT** sur son orbite.

Méthode : • **Préciser le nombre de degrés de liberté du problème**

• **Détermination des équations du mouvement (par projection du PFD dans une base adaptée)**

$\rightarrow$ Le théorème du moment cinétique ayant été utilisé en **1)** , on peut utiliser le cacactère vectoriel du **P**rincipe **F**ondamental de la **D**ynamique.

$\rightarrow$ Les coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire sont adaptées au mouvement à force centrale. L'origine O est au centre de force.

Rappels : ◦ Grandeurs cinématiques dans le cas général en base polaire dans un référentiel $\mathcal{R}$:

$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} \qquad \overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \qquad \overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{e_\theta}$

◦ Pour une trajectoire circulaire, les expressions précédente se simplifient en posant $r = Cste$:

$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} \qquad \overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \qquad \overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$

◦ Puisque le problème s'intéresse à la vitesse $v = r\dot{\theta}$ du satellite, il est plus judicieux d'écrire :

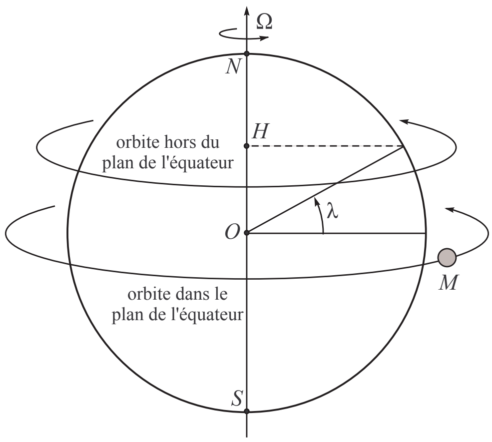
$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r} \qquad \overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}} = r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = v\overrightarrow{e_\theta} \qquad \overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}} = -\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_r} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_\theta}$$

3) L'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle est choisie nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du satellite autour de la Terre en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, r et m. Quel est l'effet des forces de frottements de l'atmosphère sur le rayon de la trajectoire et sur la vitesse du satellite ?

Méthode : Établir (ou revenir sur) la **conservation de l'énergie mécanique** en appliquant le **Théorème de l'énergie mécanique**.

4) Exprimer l'énergie mécanique ⇕ du satellite immobile à la surface de la Terre en un point de latitude λ en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, m, R_T, λ et de la période T de rotation de la Terre autour de l'axe Sud-Nord.
Pourquoi lance-t-on préférentiellement les satellites depuis les régions de basse latitude (Kourou en Guyane française : latitude 5° Nord ; Cap Canaveral en Floride : latitude 28° Nord). Les lance-t-on plutôt vers l'Est ou vers l'Ouest ?

Méthode : Le satellite est immobile sur la surface de la Terre **mais** en rotation dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$.
Attention : Ce référentiel ne tourne pas avec la Terre dans le référentiel de **Copernic**, car ses axes sont orientés vers des étoiles éloignées fixes. C'est la Terre qui tourne autour de l'axe des pôles (SN) dans $\mathcal{R}_G$.
La vitesse du **satellite fixe au sol** M est donc la vitesse d'un point de la surface de la Terre confondu avec lui (un point coïncident) en rotation autour de l'axe (SN).
↪ La trajectoire du satellite est donc circulaire de rayon $R = HM$ qui s'exprime en fonction de R_T et de λ, dans le plan passant par H parallèle au plan de l'Équateur.
↪ Il faut donc écrire la vitesse de M en coordonnées polaires (cf. Rappels en **3)**), avec origine en H, en faisant apparaître $\Omega = \dot{\theta}$ qui est la vitesse angulaire de la Terre autour de son axe.
◦ La vitesse angulaire est associée à la période de révolution par quelle relation ?



Un satellite artificiel de la Terre est **géostationnaire** *s'il est immobile dans le référentiel terrestre : son orbite est circulaire, il survole constamment le même point de la surface de la Terre. Le satellite* TELECOM *de masse $m_s = 1$ t est en orbite circulaire dans le plan de l'équateur. Il est géostationnaire .*

5) Peut-on placer un satellite géostationnaire en orbite en dehors du plan de l'équateur ?

6) Calculer l'altitude h_G (ou distance au sol), la vitesse v_G et l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{mG}$ du satellite TELECOM sur son orbite géostationnaire. Tous les satellites géostationnaires doivent-ils avoir la même masse ?

Méthode : Utiliser la **Troisième loi de Kepler** : loi propre aux trajectoires circulaires ou elliptiques d'astres tournant autour du même centre de force et dont l'interaction mutuelle est négligée.
→ L'appliquer ici au cas de satellites en orbite autour de la Terre.
◦ Cette loi est indépendante de la masse m du satellite. Elle dépend de a, rayon de la trajectoire circulaire ou demi-grand axe de la trajectoire elliptique.
◦ Elle dépend aussi de M_T, masse de la Terre associée au centre de force O. La Terre est cici supposée à symétrie sphérique : cema signifie que la répartition de sa masse ne dépend que de r. Dans ce cas, la Terre se comporte comme un point matériel situé en O auquel on associe la masse totale M_T.

7) Comparer les termes $\mathcal{E}_{mG}$, $\mathcal{E}_{kG}$ et $\mathcal{E}_{pG}$ d'un satellite géostationnaire avec les termes correspondants $\mathcal{E}_{m0}$, $\mathcal{E}_{k0}$ et $\mathcal{E}_{p0}$ du satellite immobile à la surface de la Terre dans le plan de l'équateur.

Solution

1) • Système étudié : $\{M, m\}$, satellite de la Terre étudié le référentiel géocentrique supposé galiléen $\mathcal{R}_G$.
• Bilan des forces : la seule force appliqué à M est la force gravitationnelle :

$$\overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{F} = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^2}\overrightarrow{e_r} = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^3}\overrightarrow{OM}$$

• Cette force est **conservative**, dérivant de l'énergie potentielle gravitationnelle :

$\boxed{\mathcal{E}_{p,grav} = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r}}$ (en choisissant l'origine de l'énergie potentielle pour $r \to \infty$).

• Cette force est également **centrale**, donc $\mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.
$\hookrightarrow$ le théorème du moment cinétique appliqué en O dans $\mathcal{R}_G$ conduit donc à :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_G}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}_G} = \mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_G}(M) = \overrightarrow{Cste}}$$

• Comme $\forall t \quad \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) \perp \mathcal{T} = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g})$, on en déduit que la trajectoire (constituée par l'ensemble des points M contenus dans les plans $\mathcal{T}$) est tout le temps orthogonale à une direction constante qui celle de $\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}$ – qu'on peut librement choisir selon $\overrightarrow{e_z}$.
Dès lors, la trajectoire de M est contenue dans le plan (Oxy).

2) • Pour le point matériel M en mouvement circulaire dans le référentiel géocentrique, le **P**rincipe **F**ondamental de la **Dynamique** s'écrit :

$$m\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_G} = \overrightarrow{F} \Leftrightarrow m(-r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) = -\mathcal{G}\frac{M_T m}{r^2}\overrightarrow{e_r}, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} -m\dfrac{v^2}{r} = -\mathcal{G}\dfrac{M_T m}{r^2} & ① \\ m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0 & ② \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ② \rightarrow \boxed{v = v_0 = ctse} & \text{Mouvement circulaire } \textbf{uniforme} \\ ① \rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{r}}} \end{cases}$$

• À la surface de la Terre, si l'on assimile le champ de pesanteur au champ gravitationnel : $mg_0 \approx \mathcal{G}\dfrac{M_T m}{R_T^2}$, d'où : $\boxed{\mathcal{G}M_T \approx g_0 R_T^2}$.

Alors : $\boxed{v_0 = R_T\sqrt{\dfrac{g_0}{r}} = R_T\sqrt{\dfrac{g_0}{R_T + h}} = 7,44\ km.s^{-1}}$

3) • Le satellite n'étant soumis qu'à une force conservative, le **Théorème de l'énergie mécanique** s'écrit :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W_{NC} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}_m = Cste$$

Or :

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}mv^2 = cste = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{M_T m}{r} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_k = cste = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_{p,grav}}$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_k + \mathcal{E}_{p,grav} = -\mathcal{E}_k = -\frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{M_T m}{r}}$$

• Lorsque des forces de frottements (forces non conservatives qui s'opposent au mouvement) apparaissent, le **Théorème de la puissance mécanique** s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{NC/\mathcal{R}_G} = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_G} < 0$$

Alors, l'énergie mécanique diminue au cours du temps : le rayon de la trajectoire sera de plus en plus faible ($r \searrow$) et le mouvement tourbillonnaire autour du centre de force se fera avec une vitesse… de plus en plus grande ($v \nearrow$) !

4) • Lorsque le satellite est posé sur la Terre en un point de latitude λ, son énergie mécanique dans le référentiel géocentrique se compose :
○ de l'énergie cinétique d'un point matériel M en rotation de rayon $\rho = R_T \cos\lambda$ autour de l'axe des pôles à la vitesse angulaire Ω : $\mathcal{E}_k = \dfrac{1}{2}mv_{M/\mathcal{R}_G}^2 = \dfrac{1}{2}m(\rho\Omega)^2$, soit :

$$\boxed{\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}R_T\cos\lambda\right)^2}$$

○ de l'énergie potentielle gravitationnelle qui est inversement proportionnelle à la distance dui satellite au centre de force ($r = OM = R_T$ dans ce cas) : $\boxed{\mathcal{E}_{p,grav} = -\mathcal{G}\dfrac{M_T m}{R_T}}$

DM21 • M7

→ D'où :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}R_T\cos\lambda\right)^2 - \mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T}}$$

• On constate que cette énergie mécanique est maximale lorsque $\lambda = 0$, c'est-à-dire sur l'Équateur. Puisque le terme d'énergie potentielle est indépendant de la latitude (on suppose la Terre parfaitement sphérique), cela veut dire qu'à l'énergie mécanique maximale correspond une énergie cinétique maximale dans le référentiel géocentrique **due à la rotation de la Terre** :

$$\mathcal{E}_{k,max}^{\text{rotation}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}R_T\right)^2$$

Or, pour lancer le satellite, il faut lui fournir un supplément d'énergie cinétique dans le référentiel géocentrique. Ce supplément sera d'autant plus faible que l'énergie cinétique du satellite est déjà importante – ce qui est le cas lorsqu'on est à l'Équateur.
Mais pour bénéficier de cette énergie cinétique maximale à l'Équateur dû à la rotation de la Terre, il faut bien entendu envoyer le satellite dans le sens de rotation de la Terre, c'est-à-dire vers l'Est.

• $\boxed{v_{sol}(\lambda = 0) = \frac{2\pi}{T}R_T = 0,46\ km.s^{-1}}$.

5) Le plan de la trajectoire circulaire du satellite M doit contenir le centre de force O (cf. **1**). Pour qu'un satellite géostationnaire soit toujours au-dessus d'un même point de la surface terrestre, il est impératif que le plan de sa trajectoire circulaire soit orthogonale à l'axe des pôles.
CI : tous les satellites géostationnaires sont contenus dans le plan de l'Équateur.

6) • Un satellite géostationnaire doit tourner dans le plan de l'équateur (cf. **5**) sur un cercle de rayon r_G avec la même vitesse angulaire Ω que la Terre (de manière à être en permanence au-dessus du même point de la surface de le Terre) : $v_G = r_G\Omega = r_G\frac{2\pi}{T}$.

• Comme, par ailleurs, cette vitesse s'écrit également (cf. **2**) : $v_G = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_G}}$, on en déduit **la troisième loi de Képler** :

$$v_G = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_G}} = r_G\frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{r_G^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}}$$

• Sachant que $r_G = R_T + h_G$, on en déduit l'altitude d'un satellite géostationnaire :

$$\boxed{r_G = \left(\frac{T^2\mathcal{G}M_T}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 42\,170\ km} \Leftrightarrow \boxed{h_G = r_G - R_T = 35\,800\ km}$$

• La vitesse de rotation du satellite géostationnaire est :

$$\boxed{v_G = r_G\Omega = (R_T + h_G)\frac{2\pi}{T} = 3,07\ km.s^{-1}}$$

ces résultat son indépendant de la masse du satellite géostationnaire considéré.

On retiendra que l'altitude de l'orbite géostationnaire est $\sim 36\,000\ km$**.**

• L'énergie mécanique du satellite TELECOM dans le référentiel géocentrique est :

$$\boxed{\mathcal{E}_{mG} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_G^2}_{4{,}7.10^9\ J} - \underbrace{\mathcal{G}\frac{M_T m}{r_G}}_{9{,}4.10^9\ J} = -4,7.10^9\ J}$$

7) Ces grandeurs sont à comparer avec les termes d'énergie cinétique de rotation et d'énergie potentielle gravitationnelle du satellite immobile à la surface de la Terre :

$$\boxed{\mathcal{E}_{m0} = \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi}{T}R_T\right)^2}_{0{,}1.10^9\ J} - \underbrace{\mathcal{G}\frac{M_T m}{R_T}}_{62{,}6.10^9\ J}}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{m0} = -62,5.10^9\ J}$$