DM19 • Atome de Thomson

En 1904, le physicien anglais Joseph John THOMSON *(1856-1940) proposa de présenter l'atome d'hydrogène par un nuage sphérique de centre O, de rayon R et de charge $+e$ uniformément répartie. À l'intérieur de cette sphère, fixe dans le référentiel du laboratoire, se déplace librement un électron de masse m ponctuelle et de charge $-e$.*
Le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_g(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est assimilé un référentiel galiléen.
En l'absence de toute action extérieure, l'électron M est soumis à une unique force d'origine électrostatique qui tend à attirer vers le point O : $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM}$ avec $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{e^2}{R^3}$.
Cette force se comporte comme une force de rappel élastique due à un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle, dont l'autre extrémité serait fixée en O.
À l'instant $t = 0$, une perturbation écarte légèrement l'électron de sa position d'équilibre avec les conditions initiales : $\overrightarrow{OM}(t=0) = \overrightarrow{OM_0} = r_0\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v}(t=O) = \overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_y}$.
Données :
$m = 9,11.10^{-31}\ kg$; $e = 1,6.10^{-19}\ C$; $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.10^9\ uSI$
Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8\ m.s^{-1}$.
Equation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes avec origine en O, d'axes de symétrie Ox et Oy : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

1) Montrer qu'il y a conservation du moment cinétique en O de l'électron et déterminer sa valeur en fonction de r_0, v_0 et m.
En déduire que son mouvement reste confiné dans le plan (Oxy).

Rq : La position de M est donc repérée dans les bases $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ et $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ avec comme vecteurs positions respectifs : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{e_r}$ (pour $r = \sqrt{x^2+y^2} \leq R$).

2) Exprimer la pulsation ω_0 du mouvement de M en fonction de ϵ_0, e, m et R. Calculer la valeur de R pour laquelle la pulsation ω_0 correspond à la fréquence ν_0 d'une des raies du spectre de LYMAN de l'atome d'hydrogène ($\lambda_0 = 121,8\ nm$).

3) Déterminer les expressions de $x(t)$ et $y(t)$. Montrer que la trajectoire du point M est une ellipse (ellipse de HOOKE) dont vous préciserez les longueurs a et b des demi axes.

4) À quelles condition cette trajectoire est-elle circulaire ? Que se passe-t-il si $v_0 = 0$?

5) L'électron accéléré perd de l'énergie par rayonnement. Pour tenir compte de ce phénomène, une force supplémentaire de freinage est introduite. Elle a la forme d'une force de frottement de type visqueux : $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$, où h, cœfficient de freinage, est positif.
Quelle est l'évolution du moment cinétique en O de l'électron au cours du temps ?
Dire qualitativement ce que sera le mouvement de l'électron pour de faibles amortissements.
Commenter quant à la stabilité de l'atome.

Solution

• Système étudié : $\{M, m, -e\}$, électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen $\mathcal{R}_g$.
• Bilan des forces : le poids et l'interaction électrostatique exercée par le proton (O). Le poids étant négligeable devant cette dernière force, on a : $\overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{OM}$ avec $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{e^2}{R^3}$.

• Cette force est centrale, donc $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.

1) • Le théorème du moment cinétique pour M appliqué en O point fixe du référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) = \overrightarrow{OM} \times m\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{Cste}$$

• Le moment cinétique étant un vecteur constant, ce vecteur se calcule en considérant un instant particulier pour lequel on connaît les expressions du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et de la vitesse $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g}$.
C'est le cas à $t = 0$: $\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) = \overrightarrow{OM_0} \times m\overrightarrow{v_0} = r_0\overrightarrow{e_x} \times mv_0\overrightarrow{e_y} = mr_0v_0\overrightarrow{e_z}$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) = \overrightarrow{Cste} = mr_0v_0\overrightarrow{e_z}}$

• Comme $\forall t \quad \overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M) \perp \mathcal{T} = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g})$, on en déduit que la trajectoire (constituée par l'ensemble des points M contenus dans les plans $\mathcal{T}$) est tout le temps orthogonale à une direction constante qui celle de $\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}$; en l'occurence, $\overrightarrow{e_z}$.
➜ Donc, la trajectoire de M est contenue dans le plan (Oxy).

2) Le **P**rincipe **F**ondamental de la **D**ynamique appliqué à l'électron donne :

$$m\overrightarrow{a}_{M/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{F}, \text{ ce qui s'écrit aussi : } \quad m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = -k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0}} \qquad (\star)$$

avec : $\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}}$, soit : $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{mR^3}}$.

• Si on impose $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 2\pi\frac{c}{\lambda_0}$, on en déduit que : $\boxed{R = \left(\frac{\lambda_0^2}{16\pi^3\epsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}\right)^{1/3}}$

Pour l'**A.N.**, il suffit d'écrire R sous la forme : $\boxed{R = \left(\frac{\lambda_0^2}{4\pi^2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}\right)^{1/3} = 100\ pm}$

Rq : Ce résultat est cohérent avec la longueur caractéristique de la dimension d'un atome.

3) • La solution générale vectorielle de l'équation du mouvement $(\star)$ est :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{A}\cos(\omega_0 t) + \overrightarrow{B}\sin(\omega_0 t)$$

On en déduit l'expression générale de la vitesse de l'électron :

$$\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g} = -\omega_0\overrightarrow{A}\sin(\omega_0 t) + \omega_0\overrightarrow{B}\cos(\omega_0 t)$$

• Ces deux expressions générales doivent vérifier les deux conditions initiales :
$\overrightarrow{OM}(t=0) = \overrightarrow{A} = r_0\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v}_{M/\mathcal{R}_g}(t=0) = \omega_0\overrightarrow{B} = v_0\overrightarrow{e_y}$, soit :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r_0\cos(\omega_0 t)\overrightarrow{e_x} + \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\overrightarrow{e_y}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = r_0\cos(\omega_0 t) \\ y(t) = \dfrac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \end{cases}}$$

• Comme $\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t) = 1$ on en déduit l'équation de la trajectoire :
$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$, avec : $\boxed{a = r_0}$ et $\boxed{b = \frac{v_0}{\omega_0}}$
➜ La trajectoire est une ellipse de centre O, de demi-grand axe a selon Ox et de demi-petit axe b selon Oy.

4) • Pour que la trajectoire *a priori* elliptique soit circulaire, il faut que $a = b$, soit : $\boxed{v_0 = r_0\omega_0}$.
• Lorsque la vitesse initiale de l'électron est nulle : $b = \frac{v_0}{\omega_0} = 0$.
Cl : L'ellipse s'assimile à un segment $2a$: le mouvement est rectiligne selon Ox entre l'abscisse a et l'abscisse $-a$ (on retrouve l'oscillateur harmonique à une dimension).

Rq : On remarque l'importance des conditions initiales dues à la perturbation à $t = 0$, elles vont fixer la nature de la trajectoire de l'électron dans l'atome.

5) • Il faut prendre en compte une force de freinage dont il faut calculer le moment en O :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{f} = \overrightarrow{OM} \times (-h\overrightarrow{v}) = -\frac{h}{m}\overrightarrow{OM} \times m\overrightarrow{v} = -\frac{h}{m}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)$$

Dès lors, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{0} - \frac{h}{m}\overrightarrow{L}_{O/\mathcal{R}_g}(M)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_{M/O}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathcal{R}_g} + \frac{h}{m}\overrightarrow{L}_{M/O} = \overrightarrow{0} \quad \rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{L}_{M/O}(t) = \overrightarrow{L}_{M/O}(0)e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

Cl : Le moment cinétique de l'électron en O tend vers $\overrightarrow{0}$ avec une constante de temps $\boxed{\tau = \frac{m}{h}}$.

• Le **P.F.D.** pour l'électron s'écrit désormais :

$$m\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = -k\overrightarrow{OM} - h\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{0}}$$

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\boxed{Q = \frac{m\omega_0}{h}}$

➜ On reconnaît l'équation différentielle d'un **oscillateur harmonique (spatial) amorti** : le rayon vecteur $r = OM$ tend vers 0.

Cl : Même si l'amortissement (qui traduit le rayonnement de l'électron) est faible, l'électron va se diriger inexorablement vers le centre O en tourbillonnant dans une trajectoire elliptique d'aire de plus en plus faible.

Rq : L'atome tel que l'a décrit ici THOMSON ne peut pas être stable. Niels BOHR crée en 1913 un autre modèle d'atome pour rendre compte de la stabilité atomique : les orbites des électrons sont alors quantifiées. ce fut le dernier modèle obéissant à la physique classique avant l'avènement de la physique quantique.