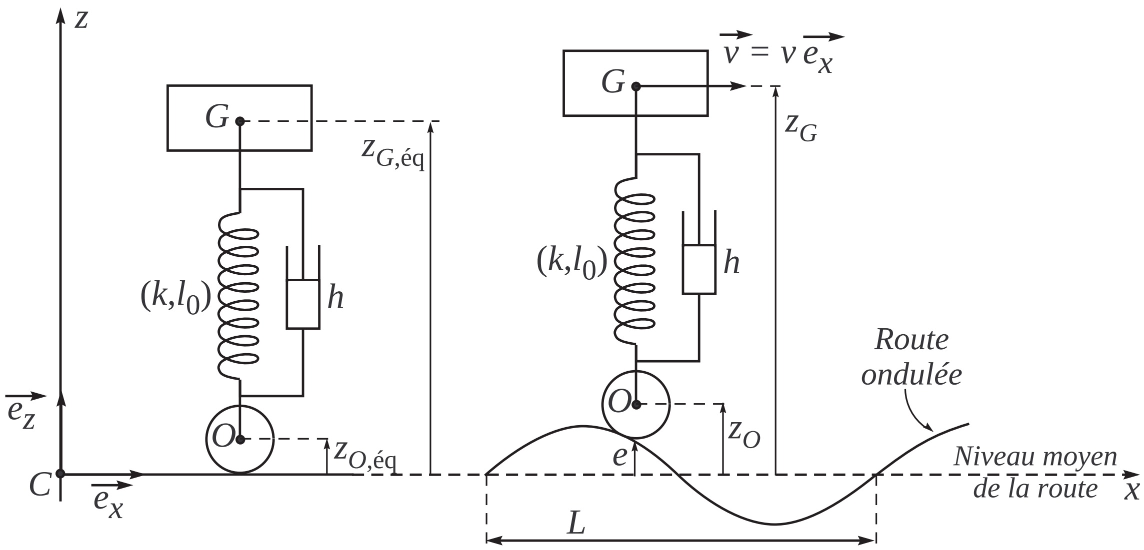
DM17 • Révisions électrocinétique / mécanique

I Véhicule sur une route ondulée [ENSTIM 2006]

• Le véhicule étudié est modélisé par un parallélépipède rectangle, de centre de gravité G et de masse M, reposant sur une roue par l'intermédiaire de la suspension dont l'axe OG reste toujours vertical. L'ensemble est animé d'une vitesse horizontale $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{e_x}$.
La suspension est modélisée par un ressort de constante de raideur $k = 1,0.10^5\ N.m^{-1}$(de longueur à vide l_0) et un amortisseur fluide de constante d'amortissement $h = 4,0.10^3\ u.S.I.$
La masse de l'ensemble est $M = 1000\ kg$.



La position verticale du véhicule est repérée par z_G dans le référentiel terrestre galiléen. L'origine du référentiel est prise sur la ligne moyenne des déformations du sol. On note z_O la cote du centre de la roue (de rayon R) par rapport au niveau moyen de la route.
L'amortissement entre M et la roue introduit une force de frottement fluide, exercée par l'amortisseur sur M, qui s'écrit : $\overrightarrow{F} = -h.\left(\frac{\mathrm{d}z_G}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z_O}{\mathrm{d}t}\right)\overrightarrow{e_z}$

• Dans les première questions la route est parfaitement horizontale (figure de gauche).
La route ne présente aucune ondulation et le véhicule n'a aucun mouvement vertical.

1) Déterminer la position $z_{G,\text{éq}}$ de G lorsque le véhicule est au repos.

• Suite à une impulsion soudaine, le véhicule acquiert un mouvement d'oscillations verticales. On cherche dans cette question à établir l'équation différentielle caractéristique du mouvement par une méthode énergétique.
Le mouvement étudié est celui de l'écart par rapport à la position d'équilibre : $z = z_G - z_{G,\text{éq}}$.
Les énergies potentielles seront exprimées en fonction de z et à une constante additive près.

2) Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur du véhicule assimilé à un point matériel de masse M placé en G.

3) Établir l'expression de l'énergie potentielle élastique de ce même système

4) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à la masse M placée en G et en déduire l'équation différentielle en z caractéristique du mouvement.

5) Dessiner, qualitativement, les allures envisageables de la fonction $z(t)$. (la résolution de l'équation différentielle n'est pas demandée).

• Le véhicule se déplace maintenant à vitesse horizontale constante v sur un sol ondulé (figure de droite). L'ondulation est assimilée à une sinusoïde de période spatiale L et d'amplitude A. z_O peut alors s'écrire $z_O = R + A.\cos(\omega t) = z_{O,\text{éq}} + e(t)$.
Le mouvement étudié est toujours l'écart par rapport à la position d'équilibre : $z = z_G - z_{G,\text{éq}}$.
Pour les applications numériques, on prendra $L = 1\ m$ et $A = 10\ cm$.

6) Quelle est l'unité de h ?

7) Exprimer ω en fonction de v et L. Vérifier l'homogénéité du résultat.

8) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse M dans le référentiel terrestre supposé galiléen, établir l'équation différentielle en z régissant le mouvement.

• On recherche la solution $z(t)$ de cette équation différentielle sous une forme sinusoïdale $z(t) = Z_m\cos(\omega t + \varphi)$. On pose $\underline{z} = \underline{Z}.e^{j\omega t}$, réponse complexe du véhicule à l'excitation sinusoïdale $\underline{e}(t) = \underline{z}_O - R = \underline{A}.e^{jwt}$.

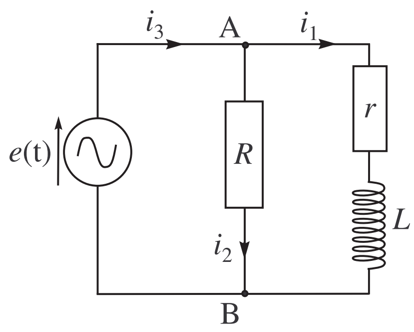
9) Montrer que : $\dfrac{\underline{Z}}{\underline{A}} = \dfrac{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_1}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}$ en exprimant ω_0, ω_1 et Q en fonction de k, h et M.

10) Calculer numériquement ω_0, ω_1 et Q.

11) Donner l'expression du module $\dfrac{|\underline{Z}|}{|\underline{A}|}$ en fonction de ω_0, ω_1 et Q.

II Facteur de Puissance [ENAC 2002]

Un générateur de tension idéal délivrant une force électromotrice sinusoïdale de valeur efficace $E = 380\ V$ et de fréquence $f = 50\ Hz$ alimente un circuit constitué par une lampe à incandescence de résistance $R = 38\ \Omega$ connectée en parallèle à un moteur $\mathcal{M}$ que l'on peut schématiser par une bobine et un résistor associés en série (cf. figure ci-contre).



Les courants i_1, i_2, i_3 sont caractérisés par :
- leurs déphasages respectifs φ_1, φ_2, φ_3 par rapport à la tension $e(t)$
- leurs intensités efficaces respectives I_1, I_2 et I_3
- leurs amplitudes complexes respectives $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$.

Rq : on rappelle que le module z d'un nombre complexe $\underline{z}$ peut s'écrire : $z = \sqrt{\underline{z}.\underline{z}^*}$

1) Comment s'écrit la loi d'Ohm aux bornes de la lampe à incandescence ?
En déduire la valeur de φ_2 ainsi que l'expression de I_2 en fonction de E et R.

2) Comment s'écrit, en notations complexes, la loi des nœuds en A ? En déduire l'expression de I_3 en fonction de I_1 et I_2.

A) $I_3 = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos\varphi_1}$ B) $I_3 = I_1 + I_2$

C) $I_3 = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\varphi_1$ D) $I_3 = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2\cos\varphi_3}$

3) En déduire l'expression de $\cos\varphi_1$ en fonction de I_1, I_3, E et R.
On mesure $I_1 = 6\ A$ et $I_3 = 15\ A$: quelle est la valeur numérique de $\cos\varphi_1$?

4) Calculer la puissance moyenne $\mathcal{P}_\mathcal{M}$, sur une période, absorbée par le moteur.

A) $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = 2\,302\ W$ B) $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = 1\,691\ W$ C) $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = 3\,953\ W$ D) $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = 1\,943\ W$

5) En déduire la résistance interne r du résistor de la modélisation du moteur.

6) En déduire l'inductance L de la bobine de la modélisation du moteur.

7) Calculer la puissance moyenne $\mathcal{P}_g$, sur une période, fournie par le générateur.

A) $\mathcal{P}_g = 5\,491\ W$ B) $\mathcal{P}_g = 2\,307\ W$ C) $\mathcal{P}_g = 1\,553\ W$ D) $\mathcal{P}_g = 755\ W$

8) Calculer la facteur de puissance $\cos\varphi_3$ de l'installation.

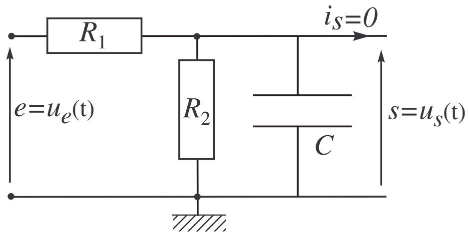
A) $\cos\varphi_3 = 0,8781$ B) $\cos\varphi_3 = 0,9633$ C) $\cos\varphi_3 = 0,9880$ D) $\cos\varphi_3 = 0,9375$

9) On désire modifier le facteur de puissance de l'installation. Pour cela, on branche un condensateur aux bornes du moteur. On appelle $i_4 = I_4\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_4)$ l'intensité qui le parcourt.
Comment s'écrit la loi d'Ohm généralisée (*i.e.* en notation complexe) aux bornes du condensateur ?
En déduire la valeur de φ_4 ainsi que l'expression de I_4 en fonction de E, C et ω.

10) Calculer la valeur de sa capacité C pour que le nouveau facteur de puissance de l'installation $\cos\varphi'_3$ soit égal à l'unité.

A) $C = 43,5\ \mu F$ B) $C = 25,1\ \mu F$ C) $C = 12,4\ \mu F$ D) $C = 33,7\ \mu F$

III Filtre du premier ordre



On alimente le circuit du schéma par une tension sinusoïdale $u_e(t) = U_{em}\cos(\omega t)$.
La tension de sortie s'écrit $u_s = U_{sm}\cos(\omega t + \varphi)$.

1) De quel type de filtre s'agit-il ? (Justifier votre réponse par des considérations simples sur le comportement asymptotique du filtre)

2) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}$ de ce filtre.
Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}$
Exprimer H_0 et ω_0 en fonction de R_1, R_2 et C.

3) Que deviennent ces deux expressions dans le cas où $R_2 = R_1$?

Pour la suite on donne : $U_{em} = 6\ V$, $R_1 = R_2 = 680\ \Omega$ et $C = 4,7\ \mu F$. On rappelle que $\log 2 \simeq 0,3$

4) Tracer le diagramme de Bode asymptotique et réel de la réponse en gain en décibels $G_{dB} = f(\log(x))$ (où x note la pulsation réduite $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$).
On prendra soin auparavant :
- de fournir les équations des trois courbes : courbe de réponse en gain en décibel (G_{dB}), asymptote basses fréquences (G_{dB}(ABF)) et asymptote hautes fréquences (G_{dB}(AHF))
- de préciser la valeur du gain en décibels lorsque $\omega = \omega_0$

5) Tracer le diagramme de Bode asymptotique et réel de la réponse en phase $\varphi = f(\log(x))$.
On prendra soin auparavant :
- de fournir les équations des trois courbes : courbe de réponse en phase (φ), asymptote basses

fréquences (φ(ABF)) et asymptote hautes fréquences (φ(AHF))
- de préciser la valeur de la phase lorsque $\omega = \omega_0$

6) Quelle est la bande passante de ce filtre ? **AN :** calculer la pulsation de coupure correspondante.

7) Sachant que la tension d'entrée a une fréquence $f = 10\ kHz$ et une amplitude $U_{em} = 6\ V$, déterminer l'atténuation (gain) en décibels de ce filtre. En déduire l'amplitude de la tension de sortie.

8) Si une composante continue $E = 6\ V$ est ajoutée à $u_e(t)$, quelle sera la tension de sortie $s(t)$ associée à la nouvelle tension d'entrée $e(t) = u_e(t) + E$?

Solution

I Véhicule sur une route ondulée [ENSTIM 2006]

1) On étudie le véhicule, assimilé à un point matériel $\{G, M\}$ dans le référentiel terrestre considéré galiléen. Il est soumis :
- à son poids : $M\overrightarrow{g} = -Mg\overrightarrow{e_z}$
- à la force de rappel du ressort : $\overrightarrow{F_r} = -k.(l - l_0)\,\overrightarrow{e_z} = -k.(z_G - z_O - l_0)\,\overrightarrow{e_z}$
- à la force de frottement fluide : $\overrightarrow{F} = -h.(\dot{z}_G - \dot{z}_O)\,\overrightarrow{e_z}$

Lorsque le véhicule est au repos, le PFD s'écrit : $\overrightarrow{0} = M\overrightarrow{g} - k.(z_{G,\text{éq}} - z_{O,\text{éq}} - l_0)\,\overrightarrow{e_z} + \overrightarrow{0}$ ①

On en déduit : $\boxed{z_{G,\text{éq}} = l_0 + R - \dfrac{Mg}{k}}$ ② (car $z_{O,\text{éq}} = R$)

2) Pour **établir** l'énergie potentielle de pesanteur (à une constante près), on cherche à écrire le travail élémentaire du poids sous la forme de l'opposé de la différentielle de l'énergie potentielle de pesanteur :
$\delta W(M\overrightarrow{g}) = M\overrightarrow{g}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{CG} = -Mg\overrightarrow{e_z}\,.\,\mathrm{d}(z_G\overrightarrow{e_z}) = -\mathrm{d}Mgz_G = -\mathrm{d}\mathcal{E}_{pg} \Rightarrow \mathcal{E}_{p,\text{g}} = Mgz_G + \text{Cte}$
Donc : $\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{g}} = Mgz + K}$ ③ (car $z_G = z + z_{G,\text{éq}}$)

3) Pour **établir** l'énergie potentielle élastique (à une constante près), on cherche à écrire le travail élémentaire de la force de rappel du ressort sous la forme de l'opposé de la différentielle de l'énergie potentielle élastique :
$\delta W(\overrightarrow{F_r}) = \overrightarrow{F_r}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{CG} = -k.(z_G - z_{O,\text{éq}} - l_0)\,\overrightarrow{e_z}\,.\,\mathrm{d}(z_G\overrightarrow{e_z}) = -\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{2}k.(z_G - z_{O,\text{éq}} - l_0)^2\right) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,\text{él}}$

Donc : $\mathcal{E}_{p,\text{él}} = \dfrac{1}{2}k.(z_G - z_{O,\text{éq}} - l_0)^2 + K'$ — soit, d'après ② : $\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{él}} = \dfrac{1}{2}k.\left(z - \dfrac{Mg}{k}\right)^2 + K'}$ ④

4) Le Thm$\mathcal{E}_k$ s'écrit, entre t et $t + \mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_k = \delta W(M\overrightarrow{g}) + \delta W(\overrightarrow{F_r}) + \delta W(\overrightarrow{F})$$

Soit, par dérivation temporelle :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_k}{\mathrm{d}t} = \frac{-\mathrm{d}\mathcal{E}_{p_\text{g}}}{\mathrm{d}t} + \frac{-\mathrm{d}\mathcal{E}_{p_\text{élas}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\delta W(\overrightarrow{F})}{\mathrm{d}t}$$

et puisque $\delta W(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{CG}$ et que $\left(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{CG}}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{v_G} = v\overrightarrow{e_x} + \dfrac{\mathrm{d}z_G}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{e_z}$, on a, d'après ③ et ④ :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}M\dot{z}_G^2\right) = \frac{-\mathrm{d}(Mgz)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}k.\left(z - \frac{Mg}{k}\right)^2\right) - h.\left(\frac{\mathrm{d}z_G}{\mathrm{d}t} - \cancel{\frac{\mathrm{d}z_{O,\text{éq}}}{\mathrm{d}t}}\right).\frac{\mathrm{d}z_G}{\mathrm{d}t}$$

Soit, avec $\dot{z} = \dot{z}_G$ (non nul puisqu'il y a mouvement) :

$$\frac{1}{\cancel{2}}.M.\cancel{2}.\cancel{\dot{z}}.\ddot{z} = -Mg\cancel{\dot{z}} - \frac{1}{\cancel{2}}.k.\cancel{2}.\cancel{\dot{z}}.\left(z - \frac{Mg}{k}\right) - h.\cancel{\dot{z}}.\dot{z}$$

Donc : $\boxed{\ddot{z} + \frac{h}{M}.\dot{z} + \frac{k}{M}.z = 0}$

Rq : Si l'énoncé n'avait pas été aussi directif, on aurait pu retrouver ce résultat par application directe du théorème de la puissance mécanique à la masse m :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\mathsf{NC}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{(\overrightarrow{F})} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_k}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p_g}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p_{\text{élas}}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_G}$$

5) ➜ Cf Cours M4 et courbes déjà rencontrées en **E3**

6) $[h] = \frac{[F]}{[v]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L.T^{-1}} = M.T^{-1}$ donc : $\boxed{u(h) = kg.s^{-1}}$

7) Par définition de la pulsation : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ où T est la période temporelle du mouvement.
La vitesse étant constante, elle est définie par le rapport entre une distance et le temps correspondant : $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{T}$. D'où : $\boxed{\omega = \frac{2\pi.v}{L}}$

8) Le PFD s'écrit : $M\overrightarrow{a_G} = M\overrightarrow{g} - k.(z_G - z_O - l_0)\,\overrightarrow{e_z} - h.(\dot{z}_G - \dot{z}_O)\,\overrightarrow{e_z}$ ⑤
En projetant ⑤ − ① : $M\ddot{z} = -k.(z_G - z_{G,\text{éq}} - (z_O - z_{O,\text{éq}})) - h.(\dot{z}_G - \dot{z}_O)$
Comme $\dot{z}_G = \dot{z}$ puisque $z = z_G - z_{G,\text{éq}}$, l'équation devient : $M\ddot{z} = -k.(z - (z_O - z_{O,\text{éq}})) - h.(\dot{z} - \dot{z}_O)$
Comme $z_O = R + A\cos(\omega t) = z_{O,\text{éq}} + e(t)$:

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{h}{M}.\dot{z} + \frac{k}{M}.z = \frac{k}{M}.e + \frac{h}{M}.\dot{e}} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}.\dot{z} + \omega_0^2.z = \omega_0^2.e + \frac{\omega_0}{Q}.\dot{e}$$

9) Cette équation devient, en régime sinusoïdal et en notation complexe :

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega\right).\underline{Z} = \underline{A}.\left(\omega_0^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\underline{Z}}{\underline{A}} = \frac{\omega_0^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega_0}{Q}\omega} = \frac{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

On en déduit : $\boxed{\frac{\underline{Z}}{\underline{A}} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$ avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \Big| \quad Q = \frac{\sqrt{kM}}{h} \quad \Big| \quad \omega_1 = Q\omega_0 = \frac{k}{h}}$

10) $\boxed{\omega_0 = 10\ rad.s^{-1} \quad \Big| \quad Q = 2,5 \quad \Big| \quad \omega_1 = 25\ rad.s^{-1}}$

11) $\boxed{\left|\frac{\underline{Z}}{\underline{A}}\right| = \frac{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$

DM17 • E4/E5/M5

II Facteur de Puissance [ENAC 2002]

1) Loi d'Ohm aux bornes de la résistance R :

$\boxed{e(t) = R.i_2(t)} \Leftrightarrow i_2(t) = \dfrac{E\sqrt{2}}{R}\cos(\omega t) = I_2\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_2)$ avec $\boxed{I_2 = \dfrac{E}{R}}$ et $\boxed{\varphi_2 = 0}$

2) Loi des nœuds en A : $\boxed{\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2}$ avec $\underline{I}_1 = I_1.e^{j\varphi_1}$ et $\underline{I}_2 = I_2$ (puisque $\varphi_2 = 0$).
On en déduit : $I_3^2 = \underline{I}_3.\underline{I}_3^* = (I_1.e^{j\varphi_1} + I_2).(I_1.e^{-j\varphi_1} + I_2) = I_1^2 + I_2^2 + I_1I_2(e^{j\varphi_1} + e^{-j\varphi_1})$
soit : $\boxed{I_3 = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos\varphi_1}}$ **Rép. A)**

3) D'où : $\cos\varphi_1 = \dfrac{I_3^2 - I_1^2 - I_2^2}{2I_1I_2}$ soit, puisque $I_2 = \dfrac{E}{R}$: $\boxed{\cos\varphi_1 = \dfrac{R^2(I_3^1 - I_1^2) - E^2}{2R.I_1.E} \simeq 0,7417}$

4) En régime sinusoïdal, la puissance moyenne reçue par le moteur soumis à la tension e (d'amplitude complexe $\underline{E} = E_m$) et parcouru par l'intensité i_1 (d'amplitude complexe $\underline{I}_1 = I_{1m}.e^{j\varphi_1}$) s'écrit : $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = \dfrac{1}{2}E_mI_{1m}\cos\varphi_1$
Donc, en faisant apparaître les grandeurs efficaces : $\boxed{\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = E.I_1.\cos\varphi_1 = 1\,691\ W}$ **Rép. B)**

5) L'impédance complexe du moteur : $\underline{Z}_1 = r + jL\omega = \dfrac{\underline{E}}{\underline{I}_1} = \dfrac{E}{I_1}.e^{-j\varphi_1} = Z_1\cos\varphi_1 - jZ_1\sin\varphi_1$
On a donc : $\cos\varphi_1 = \dfrac{r}{Z_1}$ avec $Z_1 = \dfrac{E}{I_1}$
Dès lors $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = E.I_1.\cos\varphi_1$ s'écrit également : $\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = I_1^2.Z_1.\cos\varphi_1 = r.I_1^2$
D'où : $\boxed{r = \dfrac{\mathcal{P}_{\mathcal{M}}}{I_1^2} \simeq 47\ \Omega}$ **Rq :** On pouvait écrire : $r = Z_1\cos\varphi_1 = \dfrac{E}{I_1}\cos\varphi_1 \simeq 47\ \Omega$

6) Comme par ailleurs : $Z_1 = \sqrt{r^2 + L^2\omega^2} = \dfrac{E}{I_1}$, on en déduit : $\boxed{L = \dfrac{1}{2\pi f}\sqrt{\dfrac{E^2}{I_1^2} - r^2} \simeq 135\ mH}$

7) Puissance moyenne reçue par la résistance R : $\mathcal{P}_R = E.I_2.\cos\varphi_2 = E.I_2 = \dfrac{E^2}{R} = 3\,800\ W$.
D'où la puissance moyenne fournie par le générateur : $\boxed{\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_{\mathcal{M}} + \mathcal{P}_g = 5\,491\ \Omega}$ **Rép. A)**

8) Puisque $\mathcal{P}_g = E.I_3.\cos\varphi_3$ on en déduit : $\boxed{\cos\varphi_3 = \dfrac{\mathcal{P}_g}{E.I_3} = 0,9633}$ **Rép. B)**

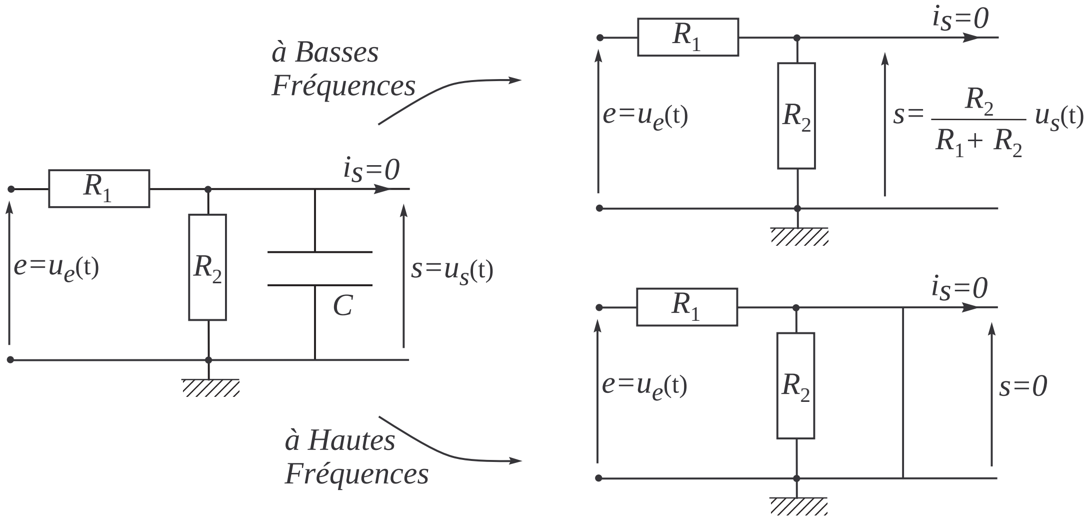
9) La loi d'Ohm généralisée aux bornes du condensateur : $\boxed{\underline{E} = \dfrac{\underline{I}_4}{jC\omega}}$

Soit $I_4.e^{j\varphi_4} = jC\omega E = CE\omega.e^{j\frac{\pi}{2}}$. Donc : $\boxed{\varphi_4 = \dfrac{\pi}{2}}$ et $\boxed{I_4 = CE\omega}$

10) La nouvelle loi des nœuds en A s'écrit : $\underline{I}_3 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_4 \ \Leftrightarrow\ I_3.^{j\varphi_3'} = I_1.e^{j\varphi_1} + I_2 + I_4.e^{1\frac{\pi}{2}}$
Imposer un facteur de puissance $\cos\varphi_3' = 1$ revient à imposer $\varphi_3' = 0$.
La loi des nœuds s'écrit alors : $I_3 = I_1\cos\varphi_1 + I_2 + j(I_1\sin\varphi_1 + I_4) \ \Rightarrow\ I_1\sin\varphi_1 + I_4 = 0$
Cette dernière relation nous donne le signe de $\sin\varphi_1$ puisque $\sin\varphi_1 = -\dfrac{I_4}{I_1} = -\dfrac{CE\omega}{I_1} < 0$
Comme $\cos\varphi_1$ est déjà connu (cf. **3)**), on en déduit la valeur de $\sin\varphi_1$:
$\sin\varphi_1 = -\sqrt{1 - \cos^2\varphi_1} \simeq -0,6707$
Enfin, on obtient la capacité cherchée : $\boxed{C = -\dfrac{I_1\sin\varphi_1}{E.2\pi.f} \simeq 33,7\ \mu F}$ **Rép. D)**

III Filtre du premier ordre

1) Une condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert à basses fréquences et comme un fil à hautes fréquences : on en déduit qu'il s'agit d'un filtre passe-bas.



2) L'impédance complexe équivalente de la résistance R_2 en parallèle avec la capacité C s'écrit :

$$\underline{Z} = \frac{R_2.\dfrac{1}{jC\omega}}{1+\dfrac{1}{jC\omega}} = \frac{R_2}{1+jR_2C\omega}$$

La fonction de transfert s'obtient facilement à partir du diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \frac{\underline{Z}}{R_1+\underline{Z}}\underline{u}_e \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\frac{R_2}{1+jR_2C\omega}}{R_1+\frac{R_2}{1+jR_2C\omega}} = \frac{R_2}{R_1+R_2+jR_1R_2C\omega}$$

Donc : $\boxed{\underline{H} = \dfrac{\frac{R_2}{R_1+R_2}}{1+j\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C\omega}}$ Soit : $\boxed{\underline{H} = \dfrac{H_0}{1+j\dfrac{\omega}{\omega_0}}}$ avec $\boxed{H_0 = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2C}}$

3) lorsque $R_1 = R_2$: $\boxed{H_0 = \dfrac{1}{2}}$ et $\boxed{\omega_0 = \dfrac{2}{R_1C}}$

4) En introduisant la pulsation réduite $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$: $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1+jx}$

soit : $H = \dfrac{H_0}{\sqrt{1+x^2}}$ et donc : $\boxed{G_{dB} = 20\log H = 20\log H_0 - 10\log(1+x^2)}$

- **Asymptote BF :** $\omega \ll \omega_0 \Leftrightarrow x \ll 1$: $\boxed{G_{dB}(\text{ABF}) = 20\log H_0 = -20\log 2 \simeq -6,0\ dB}$

L'ABF est une droite horizontale de valeur $-6,0\ dB$.

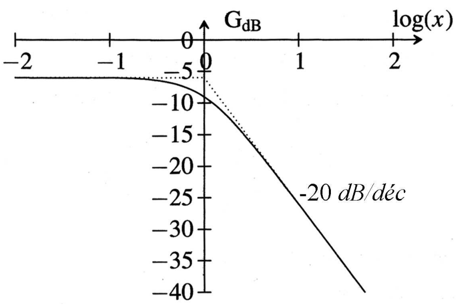
- **Asymptote HF :** $\omega \gg \omega_0 \Leftrightarrow x \gg 1$:

$\boxed{G_{dB}(\text{AHF}) = 20\log H_0 - 20\log x}$

L'AHF est une droite de pente $-20\ dB/$déc et d'ordonnée à l'origine $-6,0\ dB$.

- Pour $\omega = \omega_0$, on a $x = 1$ et donc :

$\boxed{G_{dB} = 20\log H_0 - 10\log 2 = -30\log 2 \simeq -9,0\ dB}$



5) Comme : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1+jx} = He^{j\varphi}$, on a $\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg(H_0) - \arg(1+jx)$

Donc : $\boxed{\varphi = -\arctan x}$

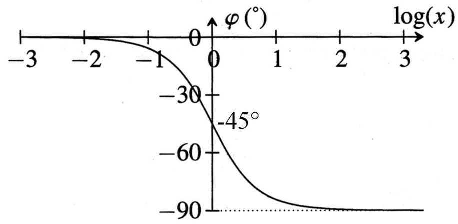
- **Asymptote BF :** $\omega \ll \omega_0 \Leftrightarrow x \ll 1$: $\boxed{\varphi(\text{ABF}) = 0°}$

- **Asymptote HF :** $\omega \gg \omega_0 \;\Leftrightarrow\; x \gg 1$:

$\boxed{\varphi(\text{AHF}) = -\dfrac{\pi}{2} = -90°}$

- Pour $\omega = \omega_0$, on a $x = 1$ et donc :

$\boxed{\varphi = -\arctan 1 = -\dfrac{\pi}{4} = -45°}$



6) Le filtre étant un filtre passe bas, $H_{\text{max}} = H(\omega = 0) = H_0$
donc, $\boxed{\text{la bande passante est } [0, \omega_c]}$ avec la pulsation de coupure ω_c telle que :

$$H(\omega_c) = \begin{cases} \dfrac{H_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{H_0}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{H_0}{\sqrt{1+x_c^2}} \end{cases} \;\Leftrightarrow\; x_c^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; \boxed{\omega_c = \omega_0 = \frac{2}{R_1 C} = 626 \; rad.s^{-1}}$$

7) Pour $f = 10\; kHz$, $\omega = 2\pi f \simeq 62,8\; kHz$, $x \simeq 100,4$ soit :

$\boxed{G_{dB} = 20\log H_0 - 10\log(1+x^2) \simeq -46,0\; dB}$

Comme $G_{dB} = 20\log H = 20\log\left(\dfrac{U_{sm}(\omega)}{U_{em}}\right) \;\Leftrightarrow\; \dfrac{U_{sm}(\omega)}{U_{em}} = 10^{\frac{G_{dB}}{20}}$

on en déduit : $\boxed{U_{sm} \simeq 10^{-2,6} U_{em} \simeq 5.10^{-3} \times 6 = 0,03\; V \ll U_{em}}$

8) Le filtre étant linéaire, pour obtenir la tension de sortie s associée à e, il suffit de sommer la tension de sortie u_s précédemment calculée et la tension de sortie S calculée pour une tension d'entrée constante E :

$$e = u_e + E \;\longrightarrow\; s = u_s + S$$

Dans le cas du régime continu, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la composante continue de la tension de sortie est (cf. **1)**) : $\boxed{S = H_0.E = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}.E = \dfrac{E}{2} = 3\; V}$

La tension de sortie est donc : $\boxed{s(t) = U_{sm}\cos(\omega t + \varphi) + S \simeq S = 3V}$ car $U_{sm} \ll S$

Rq : Le filtre passe-bas coupe la composante sinusoïdale u_e de fréquence $f = 10\; kHz$ de la tension d'entrée $e(t)$ car $f \gg f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi} \simeq 100\; Hz$