DM16 • Comportement Routier d'une Automobile

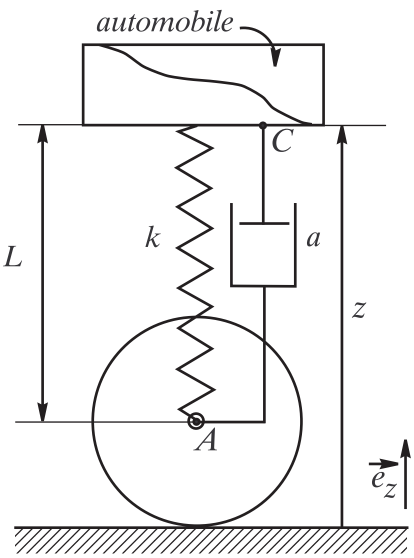
Origine de l'épreuve : Concours EIA 1999 [ATS et TSI]

I Modèle simplifié de la suspension

La suspension d'une automobile est habituellement assurée par quatre systèmes identiques indépendants montés entre le châssis du véhicule et chaque arbre de roue, et constitués chacun :
- d'un ressort métallique hélicoïdal de *constante de raideur* k et de longueur *à vide* L_0 ;
- d'un amortisseur tubulaire à piston à huile fixé parallèlement au ressort, exerçant une force résistante de frottement visqueux de *coefficient d'amortissement* a.

On suppose que la masse M du châssis est également répartie entre les quatre systèmes. Donc une suspension n'agit que sur le quart de la masse totale du châssis.

Les pneus, de rayon extérieur R, sont considérés comme entièrement rigides et n'interviennent pas dans l'étude. Tous les déplacements verticaux seront comptés algébriquement vers le haut ($\overrightarrow{e_z}$ est le vecteur unitaire vertical).



1) Le véhicule étant immobile, sans freins, sur un sol horizontal, quelle est la longueur L_e des ressorts *au repos* et la garde au sol z_0 du véhicule correspondante ?

2) Lors d'un ***essai dynamique à vide***, le châssis est abaissé d'une hauteur h, puis brusquement libéré sans vitesse initiale.

2.a) Établir l'équation différentielle de la position verticale $z(t)$ du châssis par rapport au sol sous la forme :

$$\ddot{z} + \alpha\,\dot{z} + \beta\,z = \delta \qquad (E)$$

α, β et δ étant des constantes que l'on exprimera en fonction de a, k, M et z_0.

2.b) On usine l'amortisseur de manière à obtenir un retour à la position d'équilibre final *le plus bref possible.*
Quelle doit être alors la valeur de α en fonction de β ?
En déduire celle de a en fonction de M et k.

2.c) Déterminer alors l'expression complète de la solution $z(t)$ en fonction de z_0, h et $\omega_0 = 2\sqrt{\dfrac{k}{M}}$.

2.d) Tracer avec soin le graphe $z(t)$. (On prendra pour échelle $z_0 = 1$; $h = \dfrac{z_0}{4}$; $\omega_0 = 1$).

3) On effectue de nouveau le même essai (c'est-à-dire avec les mêmes conditions initiales), mais cette fois on fait un ***essai en charge nominale*** : le véhicule contient quatre masses identiques m également réparties sur les quatre systèmes {ressort-amortisseur}.
À cause de cette masse m au niveau de chaque suspension, la garde au sol n'est plus z_0 mais z_0'.
De même la longueur correspondante du ressort n'est plus L_e mais L_e'.

3.a) Établir la nouvelle équation différentielle vérifiée par $z(t)$, et l'écrire sous la forme :

$$\ddot{z} + \alpha'\,\dot{z} + \beta'\,z = \delta' \qquad (E')$$

en exprimant les nouvelles constantes α', β' et δ' en fonction de a, k, M, m et z'_0.

3.b) Montrer que, dans ces conditions, le véhicule oscille.

3.c) Déterminer l'expression de la (pseudo-)période T des oscillations autour de la position d'équilibre final en fonction de k, M et m.

3.d) On souhaite obtenir $T = \frac{\pi}{3}$ s pour $M = 1\,000$ kg et $m = 100$ kg. En déduire la valeur de k puis de a.

Indications et réponses partielles

1) $L_e = L_0 - \frac{Mg}{4k}$.

2.a) $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{k} = \frac{\delta}{k\,z_0} = \frac{4}{M}$. – **2.b)** $a = \sqrt{kM}$. – **2.c)** $z(t) = z_0 - h(1+\omega_0 t)\exp(-\omega_0 t)$.

3.a) $\frac{\alpha'}{a} = \frac{\beta'}{k} = \frac{\delta'}{k\,z'_0} = \frac{4}{M+4m}$. – **3.c)** $T = \frac{\pi}{2}\frac{M+4m}{\sqrt{km}}$. – **3.d)** $k = 44\,100$ $N.m^{-1}$.

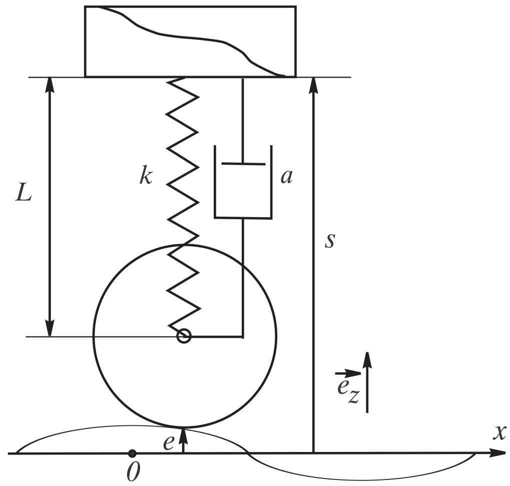
II Étude de la réponse harmonique

1) On étudie maintenant le **comportement sur une route difficile** du véhicule avec ses quatre passagers de masse m chacun (soit une masse m et le quart de la masse M du châssis pour chaque suspension).
$z'_0 = s_0$ note toujours la garde au sol du châssis chargé par $4m$ sur un sol horizontal.

1.a) On modélise la route rectiligne dans la direction x par un sol ondulé sinusoïdalement autour de la côte de référence horizontale 0 suivant la relation :

$$e(x) = e_m \cos(\gamma\, x)$$

Quelle est la distance λ entre deux bosses exprimée en fonction de γ ?
Quelle est la pulsation ω des oscillations verticales imposées aux roues si le véhicule roule sur cette route à une vitesse constante V ?



1.b) On repère maintenant le châssis par sa position $s(t)$ par rapport à la côte de référence 0 liée au référentiel terrestre supposé galiléen.

Exprimer, selon $\vec{e_z}$, la force de frottement due à l'amortisseur en fonction de a, $\dot{s}$ et $\dot{e}$.
Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ du châssis est de la forme :

$$\ddot{s} + \alpha'\,\dot{s} + \beta'\,s = f + \delta' \qquad (\star)$$

où f est une fonction du temps que l'on exprimera en fonction de e et de $\dot{e}$.

2) On étudie le **régime forcé permanent**.

2.a) Quelle est la signification de cette expression ?

2.b) On utilise les notations complexes : $\underline{e} = e_m\, e^{j\omega t}$ et $\underline{s} = \underline{S}\, e^{j\omega t}$, $\underline{s}$ étant la solution de l'équation :

$$\ddot{\underline{s}} + \alpha'\,\dot{\underline{s}} + \beta'\,\underline{s} = \underline{f}.$$

Expliquer pourquoi on ne tient pas compte du terme δ' dans $(\star)$ pour étudier les oscillations du châssis autour de sa position d'équilibre s_0.
Exprimer l'amplitude complexe $\underline{S}$ des oscillations du châssis en fonction de e_m, ω, α' et β'.
Puis, l'écrire sous la forme :

$$\boxed{\underline{S} = e_m \frac{1 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}}$$

où $\Omega \equiv \dfrac{\omega}{\omega'_0}$ est la pulsation réduite, ω'_0 et Q étant les constantes que l'on exprimera en fonction de α' et β', puis de a, k, M et m.

2.c) En déduire l'amplitude S des oscillations en fonction de Ω et Q. Que vaut-elle si $\Omega = 1$?

2.d) Montrer que S atteint un maximum S_m pour une pulsation réduite Ω_m que l'on déterminera en fonction de Q, et démontrer que $\boxed{\dfrac{S_m}{e_m} = \sqrt{\dfrac{1}{1 - \Omega_m^4}}}$.

2.e) Calculer Q, Ω_m et $\dfrac{S_m}{e_m}$.

2.f) Tracer avec soin le graphe (ou l'allure du graphe si la question précédente n'a pas été faite) donnant $\dfrac{S}{e_m}$ en fonction de Ω dans la plage $0 \leq \Omega \leq 10$.

2.g) Calculer la pulsation propre ω'_0. En déduire la distance λ_m entre les ondulations du sol provoquant la résonance des oscillations du châssis si le véhicule roule à une vitesse V de 90 $km.h^{-1}$. Comment réagit le châssis sur des déformations plus rapprochées passées à la même vitesse ?

Indications et réponses partielles

1.a) $\lambda = \dfrac{2\pi}{\gamma}$; $\omega = \gamma V$ – **1.b)** $f(t) = \alpha'\,\dot{e}(t) + \beta'\,e(t)$

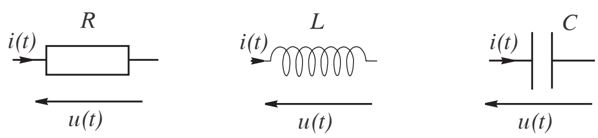
2.b) $\omega'_0 = \sqrt{\beta'} = \sqrt{\dfrac{4k}{M + 4m}}$; $Q = \sqrt{\dfrac{M + 4m}{4M}}$

2.d) Poser $u \equiv \Omega^2$ et dériver $\left(\dfrac{S}{e_m}\right)^2$ par rapport à $u \ldots \rightarrow \Omega_m = Q\sqrt{\sqrt{1 + \dfrac{2}{Q^2}} - 1}$

III Analogie électrique

1) Le comportement du véhicule peut être simulé par un circuit électrique. On se propose, ici, d'étudier celui qui représente au mieux la réponse harmonique du véhicule sur route dégradée du **II**.

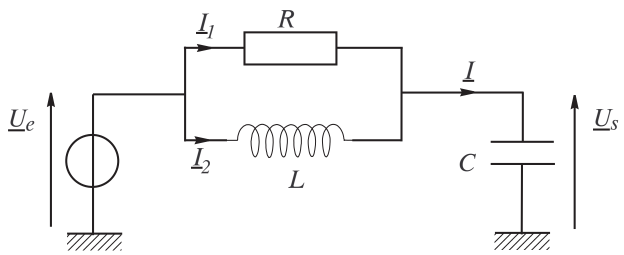
1.a) Rappeler les équations différentielles reliant le courant $u(t)$ et l'intensité $i(t)$ dans chacun des trois dipôles ci-dessous.



1.b) En déduire les relations entre leurs amplitudes complexes $\underline{U}$ et $\underline{I}$ en régime sinusoïdal de pulsation ω imposée.

2) Le circuit ci-contre est alimenté par un générateur de tension parfait délivrant une tension sinusoïdale $\underline{u}_e$ de pulsation ω.

2.a) Déterminer l'impédance équivalente $\underline{Z}$ de ce circuit.



DM16 • M5

2.b) Quelles grandeurs d'entrée $\underline{G}_e$ et de sortie $\underline{G}_s$ doivent être choisies pour obtenir une **fonction de transfert harmonique** équivalente à la question **II.2.b)**, c'est-à-dire telles que :

$$\frac{\underline{G}_s}{\underline{G}_e} = \frac{1 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}$$

où $\Omega \equiv \dfrac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite, ω_0 une pulsation propre et Q un rapport caractéristique dont on déterminera les expressions en fonction de R, L et C.

3) Pour préciser l'analogie électrique au modèle mécanique, il faut établir **l'équivalence des paramètres** mécanique $m + \dfrac{M}{4}$, k, a et électriques R, L, C.

3.a) Quelle est la **puissance moyenne** dissipée dans la résistance R en fonction de l'amplitude U_e, de R, L, C et ω ?

3.b) On note V_e l'amplitude de la vitesse $\dot{e}$ verticale de la roue dans **III.2)** due à la déformation sinusoïdale de la route, et V_s celle de la vitesse $\dot{s}$ du châssis. On donne également l'expression de la **puissance moyenne** dissipée par frottement dans l'amortisseur en fonction de a, k, M et m :

$$< \mathcal{P}_f >= \frac{1}{2}\,aV_e^2\,\frac{\omega^4}{(\beta' - \omega^2)^2 + \alpha'^2\omega^2}$$

En comparant les expressions des deux puissances moyennes, ainsi que celles des deux fonctions de transfert **II.2.b)** et **III.2.b)**, trouver les équivalents électriques de a, k, $m + \dfrac{M}{4}$ et V_s.

Indications et réponses partielles

2.a) $\underline{Z} = \dfrac{R - RCL\omega^2 + jL\omega}{jC\omega\,(R + jL\omega)}$ – **2.b)** Diviseur de tension entre $\underline{U}_s$ et $\underline{U}_e$. → d'où le résultat, avec $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$; $Q = \dfrac{R}{L\omega_0}$.

3.a) $< \mathcal{P}_J >= \dfrac{1}{2}RI_1^2 = \dfrac{1}{2}\dfrac{U_R^2}{R} = ... = \dfrac{1}{2R}\dfrac{L^2C^2\omega^4}{(1 - LC\omega^2)^2 + \dfrac{L^2\omega^2}{R^2}}U_e^2$.

Solution

I Modèle simplifié de la suspension

1) À l'équilibre, la tension du ressort d'une des quatre suspensions compense le quart du poids du châssis (le châssis n'est soumis a aucun frottement visqueux puisque la vitesse relative d'un amortisseur est nulle à l'équilibre) :

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{T} + \frac{\overrightarrow{P}}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{selon}\overrightarrow{e_z} : \quad 0 = -k(L_e - L_0) - \frac{Mg}{4} \quad \textbf{(1)}$$

Soit : $\boxed{L_e = L_0 - \dfrac{Mg}{4k}}$ et $\boxed{z_0 = L_e + R = L_0 - \dfrac{Mg}{4k} + R}$.

2.a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au quart du châssis associé à une suspension :

$$\frac{M}{4}\,\overrightarrow{a_{\text{chassis}/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{T} + \frac{\overrightarrow{P}}{4} + \overrightarrow{F}_{\text{frot}}$$

avec $\overrightarrow{a_{chassis/\mathcal{R}}} = \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}$ (mouvement vertical), $\overrightarrow{T} = -k(L - L_0)\,\overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{F}_{\text{frot}} = -a\,(\dot{z}_C - \dot{z}_A)\,\overrightarrow{e_z} = -a\,\dot{z}_C\overrightarrow{e_z} = -a\,\dot{z}\overrightarrow{e_z}$. Soit, en projection selon $\overrightarrow{e_z}$:

$$\frac{M}{4}\,\ddot{z} = -k(L - L_0) - \frac{Mg}{4} - a\,\dot{z} \quad \textbf{(2)}$$

DM16 • M5

Soit, en faisant **(2) – (1)** : $\dfrac{M}{4}\,\ddot{z} = -k(L - L_e) - a\,\dot{z} = -k(z - z_0) - a\,\dot{z}$; d'où :

$$\boxed{\ddot{z} + \alpha\,\dot{z} + \beta\,z = \delta \quad (E) \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{4a}{M} \quad \beta = \frac{4k}{M} \quad \delta = \frac{4k}{M}\,z_0}$$

2.b) Pour que le retour à la position d'équilibre soit le plus rapide possible, il faut qu'il corresponde à un **régime libre critique**.
Le régime critique est obtenu lorsque le discriminant de l'équation caractéristique associé à l'équation différentielle (E) est nul :

$$\delta = \alpha^2 - 4\beta = 0 \iff \boxed{\alpha = 2\sqrt{\beta}} \iff \frac{16\,a^2}{M^2} = 4\,\frac{4k}{M} \iff \boxed{a = \sqrt{k\,M}}$$

2.c) La solution $z(t)$ de (E) se décompose en une solution particulière de l'équation avec second membre (z_P) et de la solution générale de l'équation homogène $(z_G(t))$.
• $\boxed{z_P = z_0}$.

• L'équation caractéristique de (E) $(r^2 + \alpha\,r + \beta = 0)$ admet, pour le régime critique, une racine double :

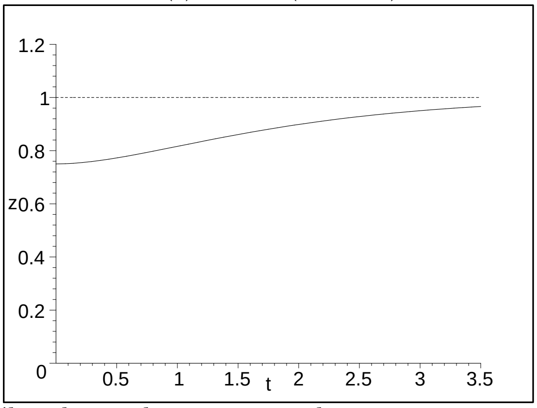
$$r = -\frac{\alpha}{2} = -\frac{2a}{M} = -2\sqrt{\frac{k}{M}} \equiv -\omega_0$$

Alors, $\boxed{z_G(t) = (A + Bt)\,e^{-\omega_0 t}}$.

• Ainsi : $z(t) = z_G(t) + z_P = (A + Bt)\,e^{-\omega_0 t} + z_0$.
Les constante d'intégration se déduisent des conditions initiales :
○ $z(t = 0) = z_0 - h = A + z_0 \;\Rightarrow\; A = -h$;
○ $\dot{z}(t = 0) = 0 = -A\omega_0 + B \;\Rightarrow\; B = A\omega_0 = -h\omega_0$.

$$\boxed{z(t) = z_0 - h\,(1 + \omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t}}$$

2.d) $z(t) = z_0 - h\,(1 + \omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t} \;\Rightarrow\; \dot{z}(t) = h\omega_0^2\,t\,e^{-\omega_0 t} > 0 \;\Rightarrow\; \ddot{z}(t) = h\omega_0\,(1 - \omega_0 t)\,e^{-\omega_0 t}$.



Ainsi, $z(t)$ est une fonction croissante dont la courbe admet :
○ une tangente horizontale en $t = 0$ (car $\dot{z}(0) = 0$),
○ un point d'inflexion M_1 pour $\ddot{z}(t_1) = 0$, soit $M_1\left(t_1 = \dfrac{1}{\omega_0}\,,\; z_1 = z_0 - \dfrac{2h}{e}\right)$,
○ une asymptote horizontale d'équation $z = z_0$ (retour à l'équilibre).

3.a) La nouvelle équation traduisant l'équilibre du véhicule en charge nominale est :

$$0 = -k(L'_e - L_0) - \frac{(M + 4m)\,g}{4} \qquad \textbf{(1')}$$

(en introduisant la nouvelle longueur à l'équilibre L'_e du ressort correspondant à la nouvelle garde au sol z'_0 du châssis chargé par $4m$).
Tandis que l'équation du mouvement du châssis chargé selon $\overrightarrow{e_z}$ devient :

$$\frac{(M + 4m)}{4}\,\ddot{z} = -k(L - L_0) - \frac{(M + 4m)\,g}{4} - a\,\dot{z} \qquad \textbf{(2')}$$

Soit, en faisant **(2') – (1')**, avec $L - L'_e = z - z'_0$:

$$\boxed{\ddot{z} + \alpha'\,\dot{z} + \beta'\,z = \delta' \quad (E') \quad \text{avec} \quad \alpha' = \frac{4a}{M + 4m} \quad \beta' = \frac{4k}{M + 4m} \quad \delta' = \frac{4k}{M + 4m}\,z'_0}$$

DM16 • M5

3.b) Le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E') est (en se souvenant que $a = \sqrt{kM}\,!$) :

$$\Delta' = \alpha'^2 - 4\beta' = \left(\frac{4a}{M+4m}\right)^2 - 4\,\frac{4k}{M+4m} = \frac{16a^2 - 16k\,(M+4m)}{(M+4m)^2} = -\frac{64\,km}{(M+4m)^2} < 0$$

Ceci correspond à des racines complexes de l'équation caractéristiques, donc à une **solution pseudo-périodique** de (E'), c'est-à-dire à une oscillation sinusoïdale amortie exponentiellement.

3.c) Pour déterminer la pseudo-période, il faut déterminer la pseudo-pulsation qui est la partie imaginaire commune aux deux racines $r_{1/2}$ de l'équation caractéristique :

$$r_{1/2} = -\frac{\alpha'}{2} \pm j\,\frac{\sqrt{|\Delta'|}}{2} = -\frac{\alpha'}{2} \pm j\omega$$

Soit : $\omega \equiv \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{4\sqrt{km}}{M+4m}$. Donc :

$$\boxed{T = \frac{\pi}{2}\,\frac{M+4m}{\sqrt{km}}}$$

3.d) On veut $T = \dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{M+4m}{\sqrt{km}} = \dfrac{\pi}{3}\;s$, soit :

$$\boxed{k = \frac{9}{4}\,\frac{(M+4m)^2}{m} = 44\,100\ N.m^{-1}} \quad \text{et donc :} \quad \boxed{a = \sqrt{kM} = 6\,600\ kg.s^{-1}}$$

II Étude de la réponse harmonique

Remarquons que sur le schéma et dans l'énoncé, la côte z par rapport à l'horizontale est désormais notée s !

1) Comportement sur une route difficile du véhicule chargé.

1.a) • la période spatiale ('distance entre deux bosses') correspond à $\gamma\lambda = 2\pi$ $\rightarrow$ $\boxed{\lambda = \dfrac{2\pi}{\gamma}}$

• Le véhicule roule selon (Ox) à la vitesse $V = cte$, donc, (avec un choix judicieux de l'origine des temps), $x = Vt$ et $e(x)$ peut s'écrire explicitement en fonction du temps t :

$$e(t) = e_m \cos(\gamma x) = e_m \cos(\gamma V\,t) = e_m \cos(\omega t) \;\Rightarrow\; \boxed{\omega = \gamma V = 2\pi\frac{V}{\lambda}}$$

Ce qui se retrouve en écrivant que la durée de parcours entre deux bosses est $T = \dfrac{\lambda}{V} = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

1.b) • La force de frottement exercée par l'amortisseur sur le châssis est proportionnelle à la différence de vitesse de ses extrémités : $\overrightarrow{F}_{\text{frot}} = -a\,(\dot{z}_C - \dot{z}_A)\,\overrightarrow{e_z} = -a\,(\dot{s} - \dot{e})\,\overrightarrow{e_z}$.
Donc, selon $\overrightarrow{e_z}$: $\boxed{F_{\text{frot}} = -a\,(\dot{s} - \dot{e})}$
• L'équation traduisant l'équilibre du véhicule en charge nominale est toujours :

$$0 = -k(L'_e - L_0) - \frac{(M+4m)\,g}{4} \qquad (1'')$$

Tandis que l'équation du mouvement du châssis chargé selon $\overrightarrow{e_z}$ devient :

$$\frac{(M+4m)}{4}\,\ddot{s} = -k(L - L_0) - \frac{(M+4m)\,g}{4} - a\,(\dot{s} - \dot{e}) \quad (2'')$$

Soit, en faisant $(2'') - (1'')$, avec $L - L'_e = s - e - z'_0$:

$$\boxed{\ddot{s} + \alpha'\,\dot{s} + \beta'\,s = f + \delta' \quad (\star) \quad \text{avec} \quad \alpha' = \frac{4a}{M+4m} \quad \beta' = \frac{4k}{M+4m} \quad \delta' = \frac{4k}{M+4m}\,z'_0}$$

$$\text{et} \quad \boxed{f = \alpha'\,\dot{e} + \beta'\,e}$$

2) Régime forcé permanent.

2.a) Le régime forcé permanent est le régime des oscillations sinusoïdales de pulsation ω imposées au système une fois que le régime transitoire a disparu.
Il correspond à la solution particulière de l'équation différentielle. Il est de forme sinusoïdale et de pulsation ω.

2.b) • On cherche à résoudre, en notation complexes ($\underline{e} = e_m\,e^{j\omega t}$ et $\underline{s} = \underline{S}\,e^{j\omega t}$), l'équation :

$$\ddot{\underline{s}} + \alpha'\,\dot{\underline{s}} + \beta'\,\underline{s} = \underline{f}.$$

• On ne tient pas compte du terme δ' dans $(\star)$ parce que seules les oscillations du châssis nous intéresse ; or δ' n'intervient que par l'ajout d'une constante ($z'_0 = s_0$) dans la solution particulière. (Négliger δ' revient, finalement, à translater le repère à la position d'équilibre s_0.)
• En complexes, il vient : $\underline{S}\,(\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha') = e_m\,(\beta' + j\omega\alpha')$, soit :

$$\boxed{\underline{S} = e_m\,\frac{\beta' + j\omega\alpha'}{\beta' - \omega^2 + j\omega\alpha'}} \quad \text{qui peut s'écrire :} \quad \boxed{\underline{S} = e_m\,\frac{1 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}{1 - \Omega^2 + j\,\dfrac{\Omega}{Q}}}$$

avec : $\boxed{\Omega = \dfrac{\omega}{\omega'_0}}$ $\boxed{\omega'_0 = \sqrt{\beta'} = \sqrt{\dfrac{4k}{M+4m}}}$ $\boxed{Q = \dfrac{\omega'_0}{\alpha'} = \sqrt{\dfrac{M+4m}{4M}}}$

2.c) Donc : $\boxed{S = |\underline{S}| = e_m\sqrt{\dfrac{1 + \dfrac{\Omega^2}{Q^2}}{(1-\Omega^2)^2 + \dfrac{\Omega^2}{Q^2}}}}$. Et lorsque $\Omega = 1$, $\boxed{S_{(\Omega=1)} = e_m\sqrt{1+Q^2}}$.

2.d) • On pose $u = \Omega^2$ et on dérive $g(u) = \left(\dfrac{S}{e_m}\right)^2 = \dfrac{1 + \dfrac{u}{Q^2}}{(1-u)^2 + \dfrac{u}{Q^2}}$ par rapport à u :

$\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u} = \ldots \to$ cette dérivée s'annule pour : $\dfrac{1}{2Q^2}\,u^2 + u - 1 = 0$.
Or, ce polynôme n'a qu'une seule racine positive ($u > 0\,!$) qui est :

$$u_m = Q^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}} - 1\right) \implies \boxed{\Omega_m = Q\sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{2Q^2}} - 1}}$$

Ω_m est la pulsation réduite de résonance correspondant à une résonance des oscillations du châssis roulant sur la route ondulée.

• $\left(\dfrac{S_m}{e_m}\right)^2 = \dfrac{1 + \dfrac{u_m}{Q^2}}{(1-u_m)^2 + \dfrac{u_m}{Q^2}}$, avec, par définition de u_m : $\dfrac{1}{2Q^2}\,u_m^2 + u_m - 1 = 0$

Soit : $\dfrac{u_m}{Q^2} = \dfrac{2 - 2u_m}{u_m}$. Donc :

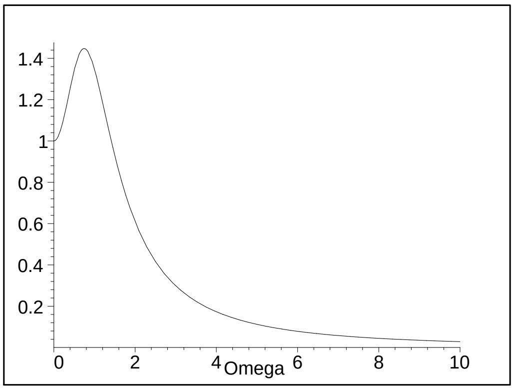
$$\left(\frac{S_m}{e_m}\right)^2 = \frac{\dfrac{2-u_m}{u_m}}{(1-u_m)^2 + 2\,\dfrac{1-u_m}{u_m}} = \frac{2-u_m}{u_m(1-u_m)^2 + 2\,(1-u_m)} = \frac{2-u_m}{(1-u_m)(u_m - u_m^2 + 2)}$$

Soit : $\left(\dfrac{S_m}{e_m}\right)^2 = \dfrac{2-u_m}{(1-u_m)(2-u_m)(1+u_m)} = \dfrac{1}{1-u_m^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dfrac{S_m}{e_m} = \sqrt{\dfrac{1}{1-\Omega_m^4}}}$

2.e) AN : $\boxed{Q = 0,59 \qquad \Omega_m = 0,75 \qquad \dfrac{S_m}{e_m} = 1,2}$.

Rq : Situation où le facteur de qualité est faible, pour avoir une faible acuité à la résonance $\dfrac{S_m}{e_m}$.

2.f) Cf. graphe ci-contre.



2.g) • Valeur de la pulsation propre du système :

$$\boxed{\omega_0' = \sqrt{\frac{4k}{M+4m}} = 2\sqrt{\frac{44\,100}{1\,400}} = 11,2\ rad.s^{-1}}$$

• Pour être à la résonance, il faut que

$$\omega = \omega_m = \Omega_m\,\omega_0' = 0,75\omega_0' = 8,4\ rad.s^{-1}$$

Or, $\lambda = VT = V\dfrac{2\pi}{\omega}$, donc, la distance λ_m entre les ondulations du sol qui commande la résonance des oscillations du châssis si le véhicule roule à vitesse V constante est :

$$\boxed{\lambda_m = V\frac{2\pi}{\omega_m} = V\frac{2\pi}{0,75\omega_0'} = 18,7\ m}$$

• Si les déformations sont plus rapprochées, $\lambda < \lambda_m$, soit $\omega > \omega_m$; on sort donc de la zone de résonance et les oscillations de la route sont alors mieux absorbées par le véhicule : $\dfrac{S}{e_m} < \dfrac{S_m}{e_m}$.

III Analogie électrique

1.a) En convention récepteur :

$$\boxed{u_R = R\,i_R \qquad u_L = L\frac{di_L}{dt} \qquad i_C = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}}$$

1.b) Aux trois relations précédentes correspondent les relations entre amplitudes complexes (en posant $\underline{i} = \underline{I}\,e^{j\omega t}$ et $\underline{u} = \underline{U}\,e^{j\omega t}$) :

$$\underline{U}_R = R\,\underline{I}_R \qquad \underline{U}_L = jL\omega\,\underline{I}_L \qquad \underline{U}_C = \frac{1}{jC\omega}\underline{I}_C$$

2.a) L'impédance du circuit est : $\underline{Z} = \underline{Z}_R//\underline{Z}_L + \underline{Z}_C = \dfrac{jLR\omega}{R+jL\omega} + \dfrac{1}{jC\omega}$.

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{R - RCL\omega^2 + jL\omega}{jC\omega\,(R+jL\omega)}}$$

2.b) Diviseur de tension entre $\underline{U}_s$ et $\underline{U}_e$:

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}} = \frac{R+jL\omega}{R-RCL\omega^2+jL\omega} = \frac{1+j\dfrac{L\omega}{R}}{1-CL\omega^2+j\dfrac{L\omega}{R}}$$

Soit : $\boxed{\dfrac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \dfrac{1+j\dfrac{\Omega}{Q}}{1-\Omega^2+j\dfrac{\Omega}{Q}}}$ avec : $\boxed{\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_0}}$ $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}}$ $\boxed{Q = \dfrac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

DM16 • M5

3.a) La puissance dissipée par effet JOULE est en moyenne :

$$<\mathcal{P}_J>=\frac{1}{T}\int_0^T Ri^2\,dt=\frac{1}{2}RI_1^2=\frac{1}{2}\frac{U_R^2}{R}=\frac{1}{2R}\frac{L^2\omega^2}{1+\frac{L^2\omega^2}{R^2}}I^2=\frac{1}{2R}\frac{L^2\omega^2}{1+\frac{L^2\omega^2}{R^2}}\frac{C^2\omega^2\left(1+\frac{L^2\omega^2}{R^2}\right)}{(1-LC\omega^2)^2+\frac{L^2\omega^2}{R^2}}U_e^2$$

$$\boxed{<\mathcal{P}_J>=\frac{1}{2R}\frac{L^2C^2\omega^4}{(1-LC\omega^2)^2+\frac{L^2\omega^2}{R^2}}U_e^2}$$

3.b) La puissance dissipée par frottement visqueux dans l'amortisseur est en moyenne :

$$<\mathcal{P}_f>=\frac{1}{T}\int_0^T|\overrightarrow{F}_{\text{frot}}\cdot(\dot{s}-\dot{e})\,\overrightarrow{e_z}|dt=\frac{1}{T}\int_0^T a\,(\dot{s}-\dot{e})^2dt=a<(\dot{s}-\dot{e})^2>.$$

Pour calculer $(\dot{s}-\dot{e})$, il faut prendre la partie réelle de $(\underline{\dot{s}}-\underline{\dot{e}})$, avec, d'après **II.2.b)** :

$$\underline{s}=\underline{e}\,\frac{\beta'+j\omega\alpha'}{\beta'-\omega^2+j\omega\alpha'}\qquad\text{et donc :}\qquad\underline{\dot{s}}=\underline{\dot{e}}\,\frac{\beta'+j\omega\alpha'}{\beta'-\omega^2+j\omega\alpha'}$$

ce qui donne : $\quad\underline{\dot{s}}-\underline{\dot{e}}=\underline{\dot{e}}\,\dfrac{\omega^2}{\beta'-\omega^2+j\omega\alpha'}=\underline{\dot{e}}\,\dfrac{\omega^2(\beta'-\omega^2-j\omega\alpha')}{(\beta'-\omega^2)^2+\alpha'^2\omega^2}$.

Et donc : $\mathcal{R}e(\underline{\dot{s}}-\underline{\dot{e}})=\dot{s}-\dot{e}=\dfrac{V_e\,\omega^2}{(\beta'-\omega^2)^2+\alpha'^2\omega^2}\left((\beta'-\omega^2)\cos\omega t+\alpha'\omega\sin\omega t\right)$.

Alors : $<\mathcal{P}_f>=a<(\dot{s}-\dot{e})^2>$, ce qui donne :

$$<\mathcal{P}_f>=\frac{V_e^2\,\omega^4}{((\beta'-\omega^2)^2+\alpha'^2\omega^2)^2}\Big((\beta'-\omega^2)^2\underbrace{<\cos^2\omega t>}_{\frac{1}{2}}+\alpha'^2\omega^2\underbrace{<\sin^2\omega t>}_{\frac{1}{2}}+2(\beta'-\omega^2)\alpha'\omega\underbrace{<\cos(\omega t)\sin(\omega t)>}_{0}\Big).$$

Finalement : $$\boxed{<\mathcal{P}_f>=\frac{1}{2}aV_e^2\,\frac{\omega^4}{(\beta'-\omega^2)^2+\alpha'^2\omega^2}=\frac{1}{2}aV_e^2\,\frac{\left(\frac{m+M/4}{k}\right)^2\omega^4}{\left(1-\frac{m+M/4}{k}\omega^2\right)^2+\frac{a^2}{k^2}\omega^2}}$$

3.c) la comparaison des deux expressions des puissances moyennes dissipées par le système mécanique en suspension et le circuit électrique permet d'identifier les **équivalences électromécaniques** suivantes :

$$\boxed{a\longleftrightarrow\frac{1}{R}\qquad k\longleftrightarrow\frac{1}{L}\qquad m+\frac{M}{4}\longleftrightarrow C\qquad V_s\longleftrightarrow U_s}$$

Rq : Pour la dernière analogie, comparer $\dfrac{\underline{s}}{\underline{e}}$ avec $\dfrac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}}$.

DM16 • M5