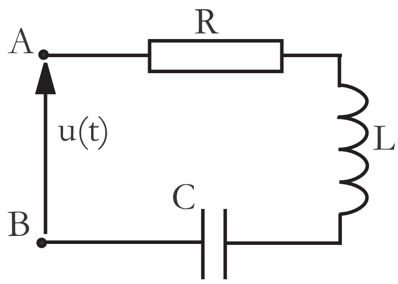
DM14. RCL série en RSF et puissance

I Facteur de qualité

Un circuit (R, L, C) série est soumis à une tension alternative sinusoïdale définie par : $u(t) = U_0 \sin \omega t$.
On étudie le régime d'oscillations sinusoïdales forcées, à la pulsation ω.

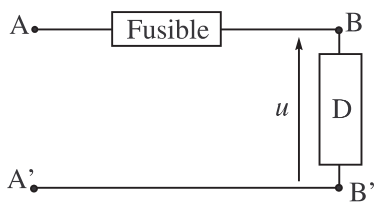


1) La pulsation ω étant fixée, déterminer la puissance moyenne $< \mathcal{P} >$ dissipée par ce circuit par effet Joule.
2) Pour quelle valeur ω_o de ω cette puissance est-elle maximale ? A quel phénomène physique correspond cette valeur ω_o ?
3) Déterminer les limites ω_{min} et ω_{max} de l'intervalle de pulsation sur lequel $< \mathcal{P} >$ est au moins égal à la moitié de sa valeur maximale $\mathcal{P}_0$.
En déduire l'expression du facteur $Q = \dfrac{\omega_0}{\omega_{max} - \omega_{min}}$ en fonction de L, R et ω_o.
Pour L et C fixés, comment Q varie-t-il avec R ?
Quel est l'intérêt d'un circuit possédant un facteur Q élevé ?
En déduire une justification de la dénomination : « facteur de qualité » du circuit.
4) Exprimer, en fonction de L, R et U_0, l'énergie électromagnétique moyenne $< \mathcal{E}_0 >$ stockée, pour la pulsation ω_o, dans la bobine ou le condensateur (vérifier que c'est la même).
En déduire une relation entre Q, ω_o, $< \mathcal{E}_o >$ et $< \mathcal{P}_o >$. Retrouve-t-on, du point de vue énergétique, l'intérêt d'un circuit à Q élevé ?

II Puissance et Régime sinusoïdal forcé

1) Un dipôle est alimenté en régime sinusoïdal forcé par une tension $u(t) = U\sqrt{2}\cos(2\pi f t)$ avec $U = 220\ V$ et $f = 50\ Hz$.
L'intensité du courant qui le parcourt est alors $i(t) = I\sqrt{2}\cos(2\pi f t + \varphi)$.
1.a) En fonction de U, I et φ, donner les expressions de :
α) l'impédance complexe $\underline{Z}$ et de son module Z (on notera j le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$) ;
β) la puissance électrique *moyenne* $\mathcal{P}_e$ absorbée par le dipôle.
1.b) En déduire l'expression $\mathcal{P}_e = \dfrac{U^2}{Z^2} R$, R étant la résistance électrique du dipôle.

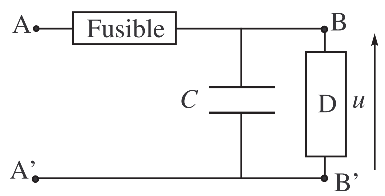
2) Un fusible de 16 A protège une ligne électrique $\{(A, B)/(A', B')\}$ alimentant en régime sinusoïdal forcé, sous une tension efficace $U = 220\ V$ et une fréquence $f = 50\ Hz$, un dipôle D assimilable à une bobine d'inductance $L = 30.10^{-3}\ H$ en série avec un dipôle ohmique de résistance R (fig. ci-contre).
L'intensité efficace maximale admissible dans la ligne est $I_{max} = 16\ A$.



Ce dipôle absorbe une puissance électrique moyenne $\mathcal{P}_e = 2\,500\ W$.
La ligne $\{(A, B)/(A', B')\}$ se comporte comme un dipôle purement ohmique de résistance électrique totale $R_0 = 1,2\ \Omega$, fusible compris.
2.a) Calculer les deux valeurs possible R_1 et R_2 de la résistance R du dipôle D.
2.b) Pour chaque valeur R_1 et R_2, calculer l'intensité efficace I_1 et I_2 dans le dipôle D.

2.c) Déterminer la seule valeur de R possible compte tenu de la présence du fusible.
2.d) En déduire l'intensité efficace I_0 du courant électrique circulant dans la ligne $\{(A, B)/(A', B')\}$ et la puissance moyenne $\mathcal{P}_0$ dissipée par effet JOULE dans cette ligne.

3) On ajoute, en parallèle sur le dipôle D, un condensateur de capacité $C = 130,4.10^{-6}\ F$.



3.a) calculer les intensités efficaces :
α) I_D dans le dipôle D ;
β) I_C dans le condensateur ;
γ) I'_0 dans la ligne.
3.b) Déterminer la puissance $\mathcal{P}'_0$ dissipée par effet JOULE dans la ligne.
3.c) Comparer $\mathcal{P}'_0$ et $\mathcal{P}_0$. Conclure sur l'intérêt de ce condensateur.

Rép : 2.a) $R_1 = 7,5\ \Omega$ et $R_2 = 11,9\ \Omega$; **2.b)** $I_1 = 18,5\ A$ et $I_2 = 14,5\ A$; **2.d)** $\mathcal{P}_0 =< \mathcal{P}_J >= 2\,750\ \Omega$; **3.a)** $I_D = 14,5\ A$; $I_C = 9,0\ A$; $I'_0 = 11,4\ A$; **3.b)** $\mathcal{P}'_0 = 2\,654\ W$.

DM14 • E4

Solution

1) $u(t) = U\sqrt{2}\cos(2\pi ft)$, $U = 220\ V$ et $f = 5\ Hz$; $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(2\pi ft + \varphi)$.

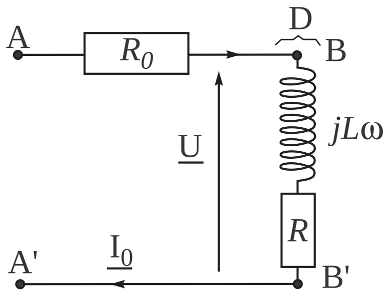
1.a.α) $\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I} \rightarrow \underline{Z} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{I}} = \dfrac{U\sqrt{2}}{I_0\sqrt{2}e^{j\varphi}} \rightarrow \boxed{\underline{Z} = \dfrac{U}{I_0}e^{-j\varphi}}$

1.a.β)
$<\mathcal{P}> = <u(t)i(t)> = <U\sqrt{2}\cos(2\pi ft)I\sqrt{2}\cos(2\pi ft+\varphi)> = 2UI_0 < \dfrac{1}{2}(\cos(4\pi ft+\varphi)+\cos\varphi)>$
$\rightarrow \boxed{\mathcal{P}_e = <\mathcal{P}> = UI_0\cos\varphi}$

1.b) $\mathcal{P}_e = UI_0\cos\varphi$; $I = \dfrac{U}{Z}$; $\cos\varphi = \cos(\arg(\underline{Z})) = \dfrac{\mathcal{R}_e(\underline{Z})}{Z} \equiv \dfrac{R}{Z} \rightarrow \boxed{\mathcal{P}_e = \dfrac{U^2}{Z^2}R}$.

2) $\mathcal{P}_e = 2\,500\ W$ et $L = 30\ mH$.

De plus : $\mathcal{P}_e = \dfrac{U^2}{Z^2}R = \dfrac{U^2R}{R^2 + L^2\omega^2}$.



2.a) D'où : $\boxed{\mathcal{P}_eR^2 - U^2R + L^2\omega^2\mathcal{P}_e = 0}$

Polynôme de degré 2 de discriminant :
$\Delta = « b^2 - 4ac » = U^4 - 4L^2\omega^2\mathcal{P}_e^2$

On vérifie que $\Delta \simeq 121,9.10^6\ V^4 > 0$

Ce qui signifie que le polynôme admet deux solutions réelles :

$$\begin{cases} .R_1 = « \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} » = \dfrac{U^2 - \sqrt{\Delta}}{2\mathcal{P}_e} & \rightarrow \boxed{R_1 \simeq 7,5\ \Omega} \\ R_2 = « \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} » = \dfrac{U^2 + \sqrt{\Delta}}{2\mathcal{P}_e} & \rightarrow \boxed{R_2 \simeq 11,9\ \Omega} \end{cases}$$

2.b) $I_0 = \dfrac{U}{Z} = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \rightarrow$ deux intensités possibles :

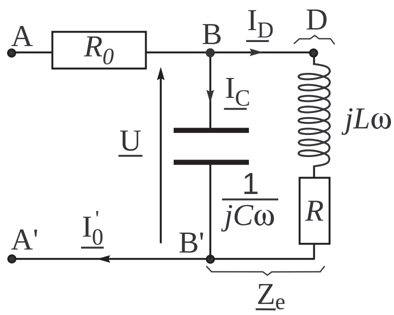
Si $R = R_1$, $\boxed{I_0 = I_1 \simeq 18,3\ A}$ et si $R = R_2$, $\boxed{I_0 = I_2 \simeq 14,5\ A}$

2.c/d) Puisque le fusible impose $I_0 < 16\ A$: $\boxed{R = R_2 \simeq 11,9\ \Omega}$ et $\boxed{I_0 = I_2 \simeq 14,5\ A}$.

D'où : $\boxed{\mathcal{P}_0 = <\mathcal{P}_J> = \dfrac{1}{2}R_{tot}I_m^2 = (R_0 + R)I_0^2 = 2\,750\ W}$

3) $\underline{Z}_e = \dfrac{\dfrac{1}{jC\omega}(R + jL\omega)}{\dfrac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} = \dfrac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

$$\underline{U} = \begin{cases} \dfrac{1}{jC\omega}\underline{I}_C \\ (R + jL\omega)\underline{I}_D \\ \underline{Z}_e\underline{I}'_0 \end{cases}$$



De plus : $C = 130,4\ \mu F$ et $R = R_2 \simeq 11,9\ \Omega$

3.a.α) $\rightarrow \boxed{I_D = |\underline{I}_D| = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \simeq 14,5\ A}$

3.a.β) $\rightarrow \boxed{I_C = |\underline{I}_C| = C\omega U \simeq 9,0\ A}$

3.a.γ) $\rightarrow \boxed{I'_0 = |\underline{I}'_0| = \dfrac{U}{Z_e} = \dfrac{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}{R^2 + L^2\omega^2} \simeq 11,4\ A}$

3.b) $\mathcal{P}'_0 = <\mathcal{P}'_J>$ est la puissance dissipée par effet Joule dans la ligne au niveau de la résistance R_0 parcourue par l'intensité efficace I'_0 et de la résistance $R = R_2$ parcourue par l'intensité efficace I_D. D'où : $\boxed{\mathcal{P}'_0 = R_0I'^2_0 + R_2I_D^2 \simeq 2\,654\ W}$

3.c) $\boxed{\mathcal{P}'_0 < \mathcal{P}_0}$: l'ajout du condensateur permet de faire baisser les pertes par effets Joule en faisant diminuer l'intensité efficace dans la ligne($I'_0 < I_0$).

I Facteur de qualité

1) Soit $i = I_0.\sin(\omega t+\varphi)$ l'intensité circulant à travers le circuit RLC série soumis (en convention récepteur) à la tension $u(t) = U_0.\sin(\omega t)$.
I_0 est l'amplitude du courant $i(t)$ et $\varphi = \varphi_i - \varphi_u$ son déphasage i par rapport à la tension $u(t)$.

$$\text{En notations complexes : } \begin{cases} \underline{u} = \underline{U}.e^{j\omega t} & \text{avec : } \underline{U} = U_0 \\ \underline{i} = \underline{I}.e^{j\omega t} & \text{avec : } \underline{I} = I_0.e^{j\varphi} \\ \underline{U} = \underline{Z}.\underline{I} = R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right) & \text{avec : } \underline{Z} = Z.e^{j\varphi} = \dfrac{I_0}{U_0}.e^{j(\varphi_i - \varphi_u)} \end{cases}$$

La puissance moyenne reçue, en régime sinusoïdal, par un dipôle d'impédance complexe $\underline{Z}$, soumis à la tension $u(t)$ et parcouru par $i(t)$ (en convention récepteur) est, sachant que $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$ et $I_0 = Z.I_0$:

$$\begin{aligned} <\mathcal{P}> &= <i(t).u(t)> = <i_{A\to B}u_{AB}> = <I_0.U_0\cos(\omega t+\varphi_i).\cos(\omega t+\varphi_u)> \\ &= \frac{I_0.U_0}{2}[\underbrace{<\cos(\varphi_u-\varphi_i)>}_{\text{constante}} + \underbrace{<\cos(2\omega t+\varphi_i+\varphi_u)>}_{\text{0 car moy. temp. d'une fonction sinusoïdale}}] \\ &\to \boxed{<\mathcal{P}> = \frac{U_0.I_0}{2}\cos\varphi = \frac{1}{2}.R.I_0^2 = \frac{U_0^2}{2}.\frac{R}{Z^2} = \frac{U_0^2}{2}.\frac{R}{R^2+\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}} \end{aligned}$$

2) $<\mathcal{P}>$ est maximale lorsque $\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2$ s'annule, c'est-à-dire lorsque $\boxed{\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$.

Alors : $\boxed{<\mathcal{P}>(\mathsf{max}) = \mathcal{P}_0 = \dfrac{U_0^2}{2R}}$

Dit autrement, $<\mathcal{P}> = \frac{1}{2}.R.I_0^2$ est maximale lorsque :

$$I_0 = I_m(\omega) = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

passe par sa valeur maximale $\boxed{I_0(\mathsf{max}) = I_m(\omega_0) = \dfrac{U_0}{R}}$.

Cl : Il y a résonance en puissance (moyenne) lorsqu'il y a résonance en intensité dans le circuit RLC série qui se comporte alors comme une résistance pure.

3) On recherche la bande passante en puissance (moyenne), c'est-à-dire les valeurs ω_c des pulsations de coupure qui sont les pulsations ω du générateur telles que : $<\mathcal{P}>(\omega) = \dfrac{<\mathcal{P}>(\mathsf{max})}{2}$

Or, comme $<\mathcal{P}>(\mathsf{max}) = \mathcal{P}_0 = \dfrac{U_0^2}{2R}$: $<\mathcal{P}>(\omega) = \dfrac{\mathcal{P}_0}{1+\left(\dfrac{L\omega}{R} - \dfrac{1}{RC\omega}\right)^2}$

Dès lors :

$$<\mathcal{P}>(\omega) = \frac{<\mathcal{P}>(\mathsf{max})}{2} \Leftrightarrow \frac{\mathcal{P}_0}{1+\left(\dfrac{L\omega}{R} - \dfrac{1}{RC\omega}\right)^2} = \frac{\mathcal{P}_0}{2} \Leftrightarrow \frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} = \pm 1$$

Soit : $\omega^2 \mp \dfrac{R}{L}.\omega - \dfrac{1}{LC} = 0$ polynôme de discriminant : $\Delta = \dfrac{R^2}{L^2} + \dfrac{4}{LC}$

En ne retenant que les racines réelles (les seules physiquement acceptables) :

$$\boxed{\omega_{\mathsf{max}} = +\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}} \qquad \boxed{\omega_{\mathsf{min}} = -\frac{R}{2L} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$$

DM14 • E4

Comme $\omega_{\mathsf{max}} - \omega_{\mathsf{min}} = \dfrac{R}{L}$, on en déduit :

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\omega_{\mathsf{max}} - \omega_{\mathsf{min}}} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R}.\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Cl : Lorsque $R \searrow$, alors $Q \nearrow$
Intérêt d'un circuit possédant un facteur de qualité élevé : réaliser un filtre (passe-bande) très sélectif, puisque plus Q est élevé et plus la bande passante (en puissance/en courant) est réduite. Par ailleurs, plus le facteur de qualité est élevé, pour L et C fixées, plus la puissance maximale est élevée puisque $\mathcal{P}_0 = \dfrac{U_0^2}{2R} = \dfrac{U_0^2.Q}{2.L\omega_0}$

4) L'énergie électromagnétique moyenne stockée dans la bobine ou le condensateur est :

$$< \mathcal{E} >=< \mathcal{E}_L > + < \mathcal{E}_C >=< \frac{1}{2}.L.i^2 > + < \frac{1}{2}.C.u_C^2 >$$

avec : $< i^2 >=< I_0^2.\sin^2(\omega t + \varphi) >= \dfrac{I_0^2}{2}$ et $< u_C^2 >=< U_{Cm}^2 \sin^2(\omega t + \varphi_C) >= \dfrac{U_{Cm}^2}{2}$
Comme $U_{Cm} = \left|\dfrac{I}{jC\omega}\right| = \dfrac{I_0}{C\omega}$:

$$< \mathcal{E} >=< \mathcal{E}_L > + < \mathcal{E}_C >= \frac{1}{4}.L.I_0^2 + \frac{1}{4}\frac{I_0^2}{C.\omega^2}$$

Soit, pour la pulsation ω_0 (imposée par l'énoncé à cette question), puisque $I_0(\omega_0) = \dfrac{U_0}{R}$ (résonance en courant) :

$$< \mathcal{E}_0 >= < \mathcal{E}_L > = \frac{1}{4}.\frac{L.U_0^2}{R^2} = \frac{1}{4}.\frac{U_0^2 Q}{R\omega_0} \qquad \text{et} \qquad < \mathcal{E}_0 >= < \mathcal{E}_C > = \frac{1}{4}\frac{1}{C.\omega_0^2}.\frac{U_0^2}{R^2} = \frac{1}{4}.\frac{U_0^2 Q}{R\omega_0}$$

Donc, puisque $\mathcal{P}_0 = \dfrac{U_0^2}{2R}$:

$$\boxed{< \mathcal{E}_0 >= \frac{1}{4}.\frac{U_0^2 Q}{R\omega_0} = \frac{Q}{2\omega_0}.\mathcal{P}_0}$$

Cl : Plus le circuit a un facteur de qualité élevé, et plus l'énergie électromagnétique moyenne stockée (pour la pulsation ω_0) est élevée puisque, lorsque L et C sont fixées :

$$< \mathcal{E}_0 >= \frac{Q}{2\omega_0}.\mathcal{P}_0 = \frac{U_0^2}{2L\omega_0^2}.Q^2 \nearrow \text{ lorsque } Q \nearrow$$

DM14 • E4