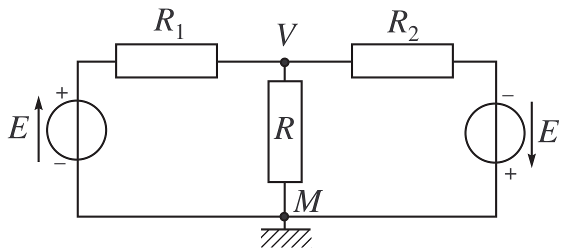
DM10 • Régime continu (3)

I Y a-t-il surchauffe ? [d'après CCP PC 11]

Un expérimentateur a câblé le montage dessiné ci-contre. Au point commun aux trois résistances apparaît un potentiel V défini par rapport à la masse.



1) Exprimer, en fonction des données littérales de l'énoncé (R_1, R_2, R_0, V et E), la puissance Joule dissipée :
- dans la résistance R_0
- dans la résistance R_1
- dans la résistance R_2

En déduire $\mathcal{P}_J$ la puissance Joule totale dissipée par le réseau.

2) Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{P}_\mathrm{J}}{\mathrm{d}V}$.
Quelle relation le potentiel V devrait-il respecter pour que la puissance $\mathcal{P}_\mathrm{J}$ soit minimale ?

3) Comparer cette relation avec celle que l'on obtiendrait en écrivant la loi des nœuds en termes de potentiels au point commun aux trois résistances.

4) Les résistances ($R_0 = 10\ \Omega$, $R_1 = 680\ \Omega$ et $R_2 = 56\ \Omega$) sont choisies dans un lot standard ne pouvant supporter une dissipation supérieure au demi-watt.
Déterminer s'il existe un risque de surchauffe pour l'une des résistances sachant que $E = 15\ V$.

II Deux dipôles linéaires actifs

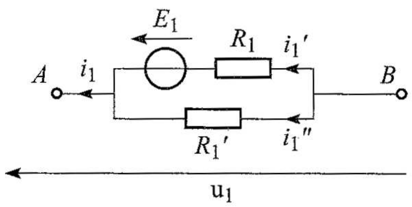


Figure 1 Dipôle actif D_1.

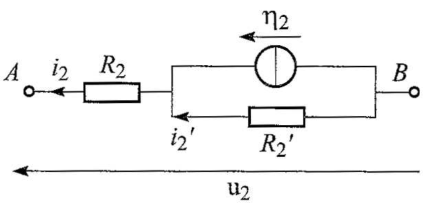


Figure 2 Dipôle actif D_2.

Rq : comme dans tout exercice d'électrocinétique, faire attention à la convention (récepteur ou générateur) avant d'appliquer la loi d'Ohm pour relier tension au borne du conducteur ohmique, intensité qui le traverse et résistance.

1) Figure 1 :
1.a) Donner la relation entre i_1, i_1' et i_1''.
1.b) En déduire l'expression de i_1 en fonction de u_1, E_1, R_1 et R_1'.
Rq : noter qu'on retrouve directement ce résultat en appliquant la loi des nœuds en termes de potentiels à la borne A (ou B).
1.c) En déduire la résistance interne $R_{\text{éq}_1}$ et la forcé électromotrice E_{Th_1} du générateur de Thévenin équivalent au dipôle D_1.
1.d) Tracer la caractéristique statique $u_1 = f(i_1)$ du dipôle D_1.
Données : $E_1 = 5\ V$; $R_1 = 1\ k\Omega$; $R_1' = 500\ \Omega$.

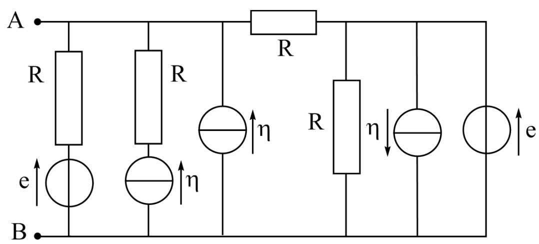
2) Figure 2 :
2.a) Donner la relation entre i_2, η_2 et i'_2.
2.b) En déduire l'expression de i_2 en fonction de u_2, η_2, R_2 et R'_2.
2.c) En déduire la résistance interne $R_{\text{éq}_2}$ et la forcé électromotrice $E_{\text{éq}_2}$ du générateur de Thévenin équivalent au dipôle D_2.

3) Les deux dipôles sont branchés l'un sur l'autre.
3.a) Exprimer i_2 en fonction de i_1. Exprimer u_2 en fonction de u_1.
3.b) Déterminer le point de fonctionnement $\{i_1; u_1\}$. Avant les applications numériques, on exprimera i_1 en fonction des résistances internes et des forces électromotrices des modélisations de Thévenin des deux dipôles.
Données : $\eta_2 = 10\ mA$; $R_2 = 1,5\ k\Omega$; $R'_2 = 1\ k\Omega$.
3.d) Retrouver ce point de fonctionnement en traçant la caractéristique statique $u_2 = f(i_1)$ du dipôle D_2 sur la courbe déjà tracée en **1.d)**.

Rép : $i_1 = -2,94\ mA$ et $u_1 = 2,65\ V$.

III Modélisation de Thévenin

1) Donner le générateur de Thévenin équivalent au circuit ci-contre entre A et B.
Conseil : avant d'effectuer des associations ou des transformations, simplifier le réseau en supprimant le(s) dipôle(s) ou la(les) branche(s) inutile(s) du point de vue du circuit extérieur aux bornes A et B.



Rép : $R_{\text{éq}} = \dfrac{R}{2}$ et $E_{\text{Th}} = e + R\eta$.

2) On ferme le réseau en ajoutant une résistance R entre les bornes A et B. Déterminer le potentiel du point A si on fixe B comme masse :
2.a) En utilisant la modélisation de la question précédente.
2.b) En revenant au câblage de l'énoncé et en appliquant directement le théorème de Millman au point A.

Rép : $V_A = \dfrac{2}{3}(e + R\eta)$

DM8 • Élec.

Solution

I Y a-t-il surchauffe ? [d'après CCP PC 11]

1) Un conducteur ohmique de résistance R soumis à une tension U dissipe une puissance : $\dfrac{U^2}{R}$
Alors, la puissance Joule dissipée :
- dans la résistance R_0 : $\mathcal{P}_0 = \dfrac{V^2}{R_0}$
- dans la résistance R_1 : $\mathcal{P}_1 = \dfrac{(V-E)^2}{R_1}$
- dans la résistance R_2 : $\mathcal{P}_2 = \dfrac{(V+E)^2}{R_2}$

On en déduit la puissance totale dissipée dans le réseau : $\boxed{\mathcal{P}_\mathsf{J} = \dfrac{V^2}{R_0} + \dfrac{(V-E)^2}{R_1} + \dfrac{(V+E)^2}{R_2}}$

2) Lorsque cette puissance est extrémale en fonction de V :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{P}_\mathsf{J}}{\mathrm{d}V} = 2\frac{V}{R_0} + 2\frac{(V-E)}{R_1} + 2\frac{(V+E)}{R_2} = 0 \quad (\star)$$

La dérivée seconde de la puissance en fonction de V est : $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathcal{P}_\mathsf{J}}{\mathrm{d}V^2} = \dfrac{2}{R_0} + \dfrac{2}{R_1} + \dfrac{2}{R_2} > 0$
Donc : l'extremum est un minimum. Il en résulte que cette puissance est minimale lorsque V est lié par la relation :

$$(\star) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).V = \frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_2}} \quad (\star\star)$$

3) La loi des nœuds en termes de potentiels au point commun aux trois résistances s'écrit :

$$\boxed{\frac{\cancel{V_M} - V + E}{R_1} + \frac{\cancel{V_M} - V}{R_0} + \frac{\cancel{V_M} - V - E}{R_2} = 0} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).V = \frac{E}{R_1} - \frac{E}{R_2}$$

CI : La relation que doit vérifier le potentiel V pour minimiser la puissance dissipée coïncide avec celle imposée par la loi des nœuds.

4) Avec les valeurs de l'énoncé, on peut calculer le potentiel V :

$$(\star\star) \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \frac{E.(R_2R_0 - R_1R_0)}{R_2R_0 + R_1R_0 + R_2R_1} = -2,1\ V}$$

On peut alors calculer les puissances dissipées par les conducteurs ohmiques :

$$\boxed{\mathcal{P}_0 = \frac{V^2}{R_0} = 0,42\ W \qquad \mathcal{P}_1 = \frac{(V-E)^2}{R_1} = 0,43\ W \qquad \mathcal{P}_2 = \frac{(V+E)^2}{R_2} = 3,0\ W}$$

CI : la résistance R_2 est susceptible de surchauffer puisque $\mathcal{P}_2 > 0,5\ W$.

II Modélisation de Thévenin

1) • Un courant électromoteur impose l'intensité dans la branche où il se trouve : la résistance R en série avec η est inutile du point de vue des courants dans cette branche ainsi que du reste du circuit (la *d.d.p.* pouvant être quelconque aux bornes d'un *c.é.m.* idéal).
• Une force électromotrice impose la tension à ses bornes, donc tut dipôle monté en parallèle (entre les mêmes bornes) est inutile du point de vue de la tension entre ces bornes. Ici, on eut supprimer la résistance R et le *c.é.m.* η en parallèle avec e.
CI : Un schéma équivalent au schéma de l'énoncé est donc : cf. Ex-E2.4 corrigé en TD

DM8 • Élec.

2) 2.a) Diviseur de tension (masse au point B) :

$$V_A = U_{AB} = \frac{R}{R + \frac{R}{2}}.E_{\mathsf{Th}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = \frac{2}{3}.(e + R\eta)}$$

2.b) En revenant au câblage de l'énoncé et en appliquant directement le théorème de Millman au point A (masse au point B) :

$$V_A = \frac{\eta + \eta + \frac{\cancel{V_B} + e}{R} + \frac{\cancel{V_B}}{R} + \frac{V_C}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{\frac{2e}{R} + 2\eta}{\frac{3}{R}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = \frac{2}{3}.(e + R\eta)}$$

DM8 • Élec.