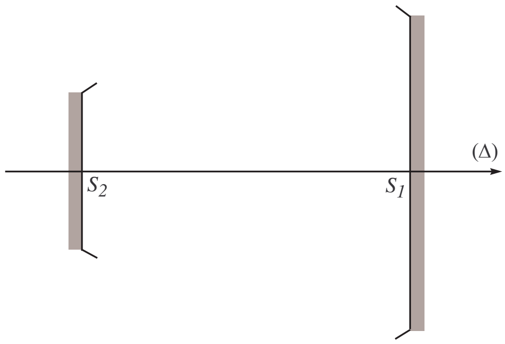
DM5 • Miroirs sphériques et lentilles minces

I Télescope à deux miroirs sphériques

Soient deux miroirs concaves ($\mathcal{M}_1$) (de sommet S_1, de centre C_1) et ($\mathcal{M}_2$) (de sommet S_2, de centre C_2) de même axe optique.
On cherche à obtenir la formation de l'image d'une étoile par ce système de deux miroirs dans le plan de front passant par S_1.
On note R_1 le rayon algébrique du miroir ($\mathcal{M}_1$).
L'étoile est vue sous le diamètre angulaire ϵ.

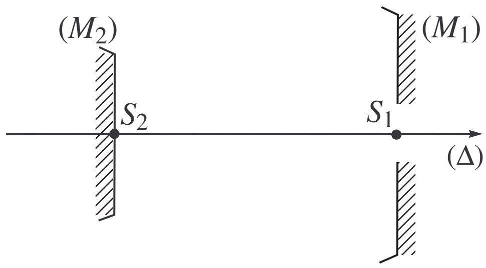


1) On souhaite que l'image finale A_2B_2 soit trois fois plus grande que l'image intermédiaire A_1B_1 (Quel doit alors être le signe du grandissement transversal G_{t2} du miroir ($\mathcal{M}_2$) pour l'objet A_1B_1 ?)
→ Déterminer la position ($\overline{S_2S_1}$) et le rayon algébrique (R_2) du miroir ($\mathcal{M}_2$) en fonction de R_1 pour avoir une telle image finale.

2) Représenter sur la feuille de papier millimétrée fournie les rayons lumineux issus de l'étoiles et leur chemin dans le télescope donnant l'image A_2B_2 si $R_1 = \overline{S_1C_1} = -16\ cm$.

II Télescope équivalent à une lentille mince

On réalise un système optique constitué par l'association de deux miroirs sphériques ($\mathcal{M}_1$) (concave, de sommet S_1 centre C_1) et ($\mathcal{M}_2$) (convexe, sommet S_2, centre C_2) de même axe optique principal, disposés comme ci-contre.
Le miroir est percé en son sommet S_1 d'un petit trou permettant à la lumière de passer mais ne modifiant pas ses propriétés.
Les distances focales f_1 et f_2 des deux miroirs ($\mathcal{M}_1$) et ($\mathcal{M}_2$) sont telles que $f_1 = -3\ m$ et $f_2 = -2\ m$.



1) On note $d = \overline{S_2S_1}$.
Déterminer d pour que tout rayon incident parallèle à l'axe optique et réfléchi par les deux miroirs passe par S_1. Vérifier le calcul par un graphique à l'échelle de 2 cm (ou 2 *carreaux*) pour 1 m.
Dans la suite, on conserve cette valeur de d.

2) Déterminer la position des foyer objet et image (F et F') de ce système.

3) Vérifier que ce système optique est équivalent à une lentille mince dont on donnera les caractéristiques (distance focale, position du centre).

III Microscope et profondeur de champ

Un microscope peut être modélisé par deux lentilles minces convergentes ($\mathcal{L}_1$) et ($\mathcal{L}_2$) alignées sur le même axe optique.
($\mathcal{L}_1$) modélise l'objectif et possède une distance focale image $f'_1 = 5,00\ mm$.
($\mathcal{L}_2$) modélise l'oculaire et possède une distance focale image $f'_2 = 40,00\ mm$.

La distance Δ (appelée « intervalle optique ») entre le foyer image F'_1 de $(\mathcal{L}_1)$, et le foyer objet F_2 de $(\mathcal{L}_2)$ vaut $\Delta = 145,000\ mm$.
On rappelle que la distance minimale de vision distincte d'un œil normal vaut $d_m = 25\ cm$. C'est la plus petite distance entre l'œil et un objet pour laquelle on peut voir l'objet net (limite d'accommodation).
D'autre part, un œil normal voit net sans accommoder si l'objet est à l'infini.
On observe au microscope un petit objet AB, A étant placé sur l'axe optique et AB perpendiculaire à l'axe optique. L'œil est placé sur l'axe optique après l'oculaire.
On s'intéresse dans cet exercice à la position l'objet par rapport à l'objectif.

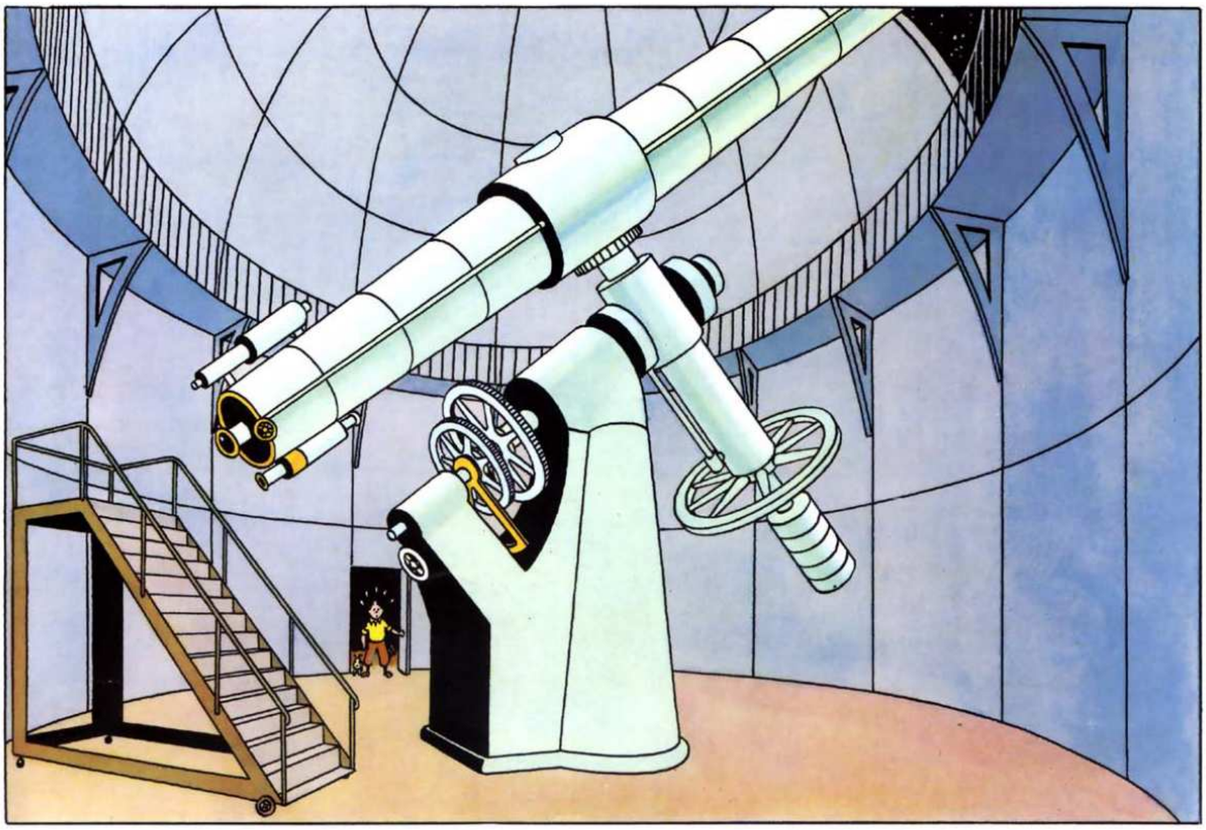
1) On note $(\overline{O_1A})_{\mathsf{PR}}$ la position de A par rapport à O_1 pour que l'œil observe AB à travers le microscope sans accommoder.
Donner l'expression littérale (en fonction de f'_1 et Δ) et faire l'application numérique.

2) On considère deux rayons lumineux parallèles émergeant du microscope par $(\mathcal{L}_2)$.
Dessiner leur trajet à travers le microscope et trouver ainsi graphiquement la position de AB.
• On prendra soin de faire apparaître sur la figure les points particuliers des deux lentilles ainsi que l'image intermédiaire A_1B_1 de l'objet AB par la lentille $(\mathcal{L}_1)$.
• Pour le dessin, prendre $f'_1 = 2,0\ cm$, $f'_2 = 4,0\ cm$ et $\Delta = 6,0\ cm$ et des rayons émergents peu inclinés par rapport à l'axe optique.

> ◇ **Définition :** Le **profondeur de champ** ou **latitude de mise au point** désigne la distance qui sépare les positions extrêmes de l'objet telles que l'image se trouve dans la zone de vision distincte de l'œil – c'est-à-dire entre le *punctum proximum* (PP) et le *punctum remotum* (PR) de l'œil.

3) On suppose pour cette question qu'un œil normal est placé en F'_2.
Calculer la profondeur de champ l de ce microscope. Commenter.

DM5 • Opt.



Corrigé

I Télescope à deux miroirs sphériques

1) Pour que le miroir concave $(\mathcal{M}_2)$ fasse de A_1B_1 une image réelle agrandie, il faut que A_1 soit entre le foyer F_2 et le centre C_2. Alors $G_{t2} = \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = -3 < 0$.

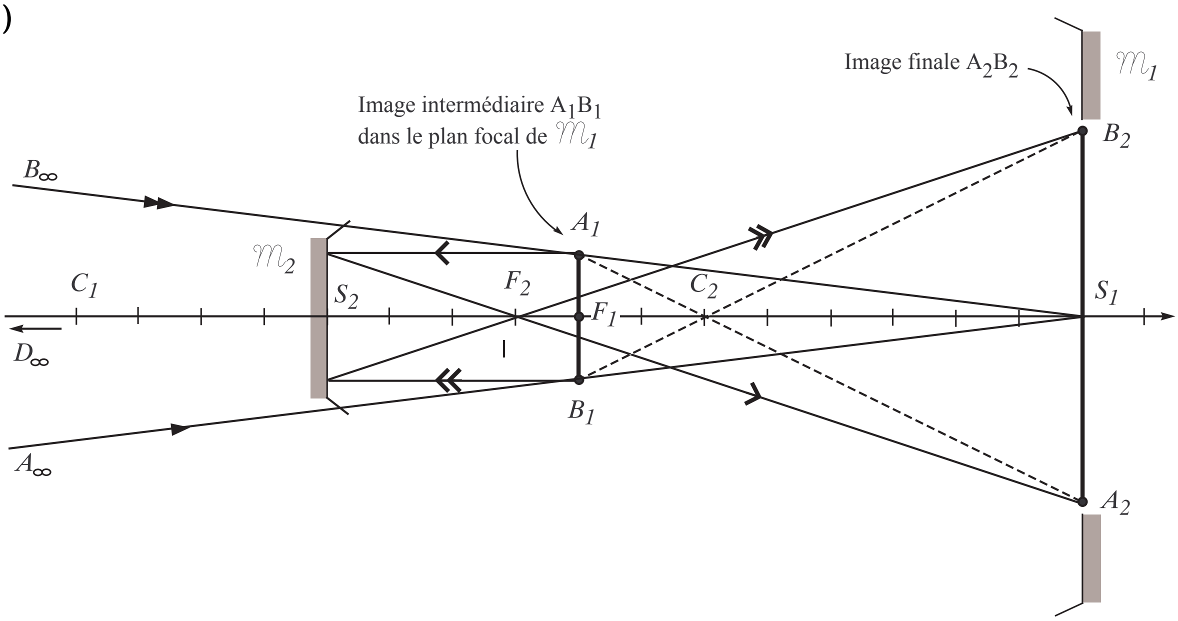
L'axe du télescope étant dirigé vers une étoile, donc vers un objet à l'infini on a à vérifier les deux relations suivantes :

- $D_\infty \xrightarrow{\mathcal{M}_1} F_1 = D_1 \xrightarrow{\mathcal{M}_2} D_2 = S_1$ soit : $\dfrac{1}{\overline{S_2S_1}} + \dfrac{1}{\overline{S_2F_1}} = \dfrac{2}{\overline{S_2C_2}} = \dfrac{2}{R_2}$ (1)
- $G_{t2} = \dfrac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = -3$ soit : $G_{t_2} = -\dfrac{\overline{S_2S_1}}{\overline{S_2F_1}}$ (2).

On déduit de (2) $\rightarrow \overline{S_2S_1 = 3\,\overline{S_2F_1}} = 3\,(\overline{S_2S_1}+\overline{S_1F_1})$, ce qui conduit à : $\boxed{\overline{S_2S_1} = -\dfrac{3}{4}\,R_1} > 0$ (car $R_1 = \overline{S_1C_1} < 0$).

Alors, de (1), on déduit : $\boxed{R_2 = -\dfrac{3}{8}\,R_1} > 0$.

2)



II Télescope équivalent à une lentille mince

1) Schéma de fonctionnement :

$$A_\infty \xrightarrow{(\mathcal{M}_1)} F_1 \xrightarrow{(\mathcal{M}_2)} S_1 = F'$$

La relation de conjugaison avec origine au sommet pour le miroir $(\mathcal{M}_2)$ s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{S_2S_1}} + \frac{1}{\overline{S_2F_1}} = \frac{1}{f'_2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{d} + \frac{1}{d+f'_1} = \frac{1}{f'_2} \quad \Leftrightarrow \quad d^2 + (f'_1 - 2f'_2).d - f'_1.f'_2 = 0$$

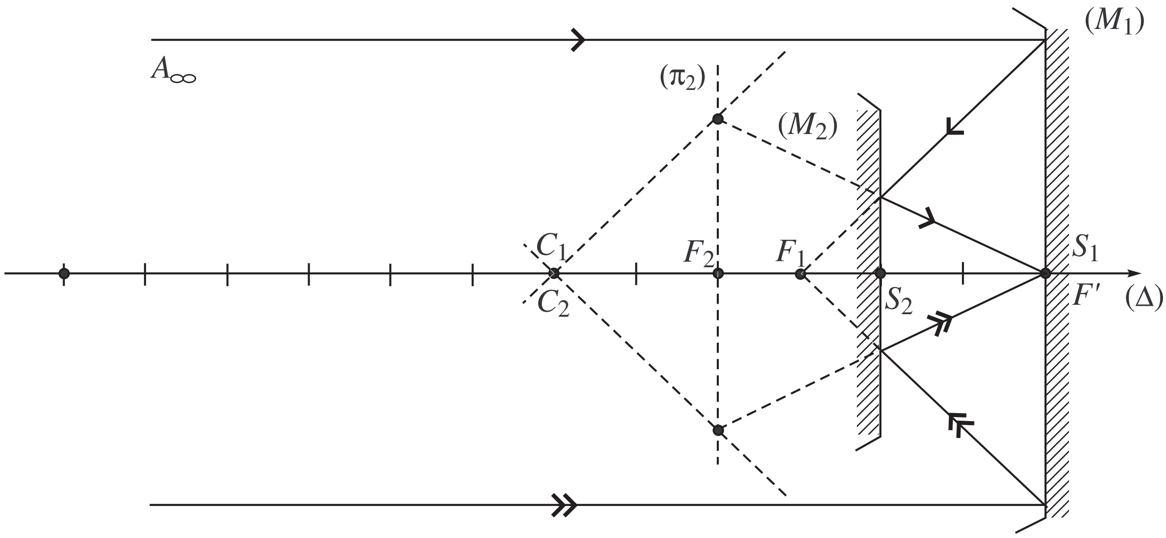
Rq : on pouvait utiliser la relation de conjugaison avec origine au(x) foyer(s) :

$$\overline{F_2S_1}.\overline{F_2F_1} = -{f'_2}^2 \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{F_2S_2} + \overline{S_2S_1}).(\overline{F_2S_2} + \overline{S_2S_1} + \overline{S_1F_1}) = -{f'_2}^2$$

Soit :

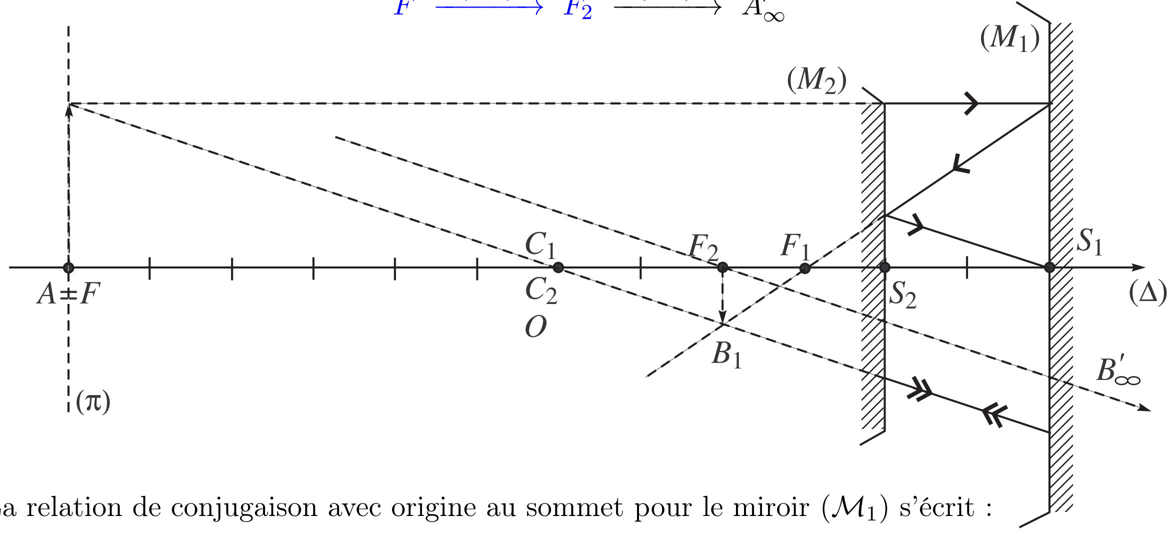
$$(-f'_2 + d).(-f'_2 + d +'_1) = -{f'_2}^2 \quad \Leftrightarrow \quad d^2 + (f'_1 - 2f'_2).d - f'_1.f'_2 = 0$$

Soit, puisque $f'_1 = -3\ m$ et $f'_2 = -2m$, $d = \overline{S_2S_1}$ est solution de : $\boxed{d^2 + d - 6 = 0}$
Le discriminant du polynôme est : $\Delta = 25$; le polynôme admet une seule racine positive (et donc physiquement acceptable) : $\boxed{d = \dfrac{-1+\sqrt{\Delta}}{2} = 2\ m}$



2) Le foyer image a été défini à la question précédente ($F = S_1$). Quant au foyer objet :

$$F \xrightarrow{(\mathcal{M}_1)} F_2 \xrightarrow{(\mathcal{M}_2)} A'_\infty$$



La relation de conjugaison avec origine au sommet pour le miroir $(\mathcal{M}_1)$ s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{S_1F_2}} + \frac{1}{\overline{S_1F}} = \frac{1}{f'_1} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{S_1S_2} + \overline{S_2F_2}} + \frac{1}{\overline{S_1F}} = \frac{1}{f'_1} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{S_1F}} = \frac{1}{f'_1} - \frac{1}{-d + f'_2}$$

Soit : $\boxed{\overline{S_1F} = \dfrac{f'_1.(d - f'_2)}{d - f'_2 + f'_1} = -12\ m}$

3) Sur le graphe précédent, on vérifie qu'un objet O placé en $C_1 = C_2$ est sa propre image par le système $\{\mathcal{M}_1; \mathcal{M}_2\}$. Il s'agit donc du centre optique du système :

$$O = C_1 \xrightarrow{(\mathcal{M}_1)} C_1 = C_2 \xrightarrow{(\mathcal{M}_2)} C_2 = O$$

On vérifie que O est au milieu de $[F, F']$
Cl : Le système est équivalent à une lentille sphérique de centre optique $\boxed{O = C_1 = C_2}$, de foyers F et F', et de focale $\boxed{f' = \overline{OF'} = \overline{C_1S_1} = 6\ m}$

III Microscope et profondeur de champ

1) Schéma de fonctionnement :

$$AB \xrightarrow{(\mathcal{L}_1)} A_1B_1 = F_2B_1 \xrightarrow{(\mathcal{L}_2)} A'_\infty B'_\infty$$

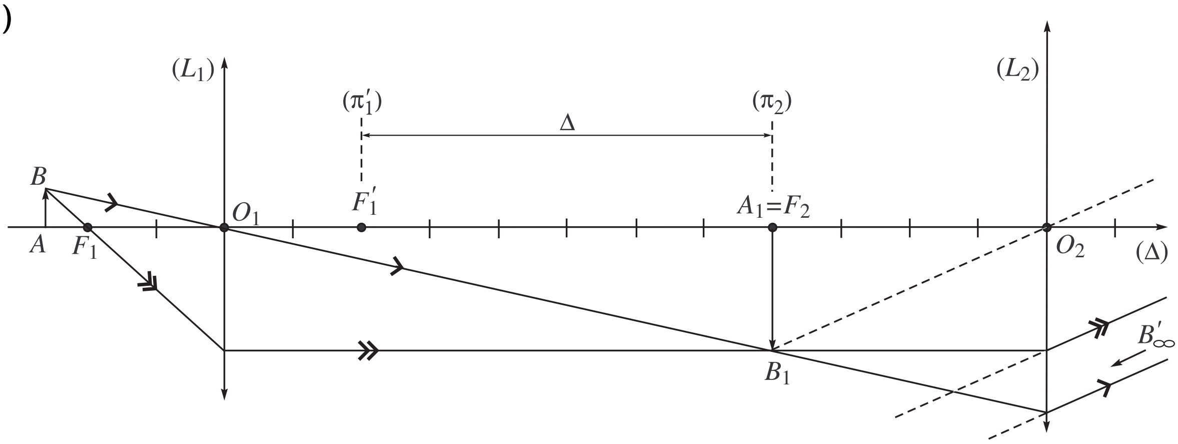
L'image $A'B'$ est à l'infini (virtuelle) pour une observation à l'infini (sans accommodation donc). On en déduit que l'objet intermédiaire A_1B_1 est dans le plan focal objet de la lentille oculaire $(\mathcal{L}_2)$. Soit $\boxed{A_1F_2}$.
Par conséquent, la lentille objectif $(\mathcal{L}_2)$ conjugue les points A et F_2.
On applique la relation de Newton, en introduisant $\Delta = \overline{F_1'F_2}$:

$$\overline{F_1'F_2}.\overline{F_1A} = -f_1'^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{F_1A} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}$$

Comme $\overline{F_1A} = \overline{F_1O_1} + \overline{O_1A}$, on en déduit, puisque la position de AB correspond à une image finale $A'_\infty B'_\infty$ observée au *punctum remotum* d'un œil « normal » :

$$\boxed{(\overline{O_1A})_{\mathsf{PR}} = -f_1'.\left(1 + \frac{f_1'}{\Delta}\right) = -5,17\ mm}$$

2)



3) Schéma de fonctionnement :

$$A \xrightarrow{(\mathcal{L}_1)} A_1 \xrightarrow{(\mathcal{L}_2)} A' \quad \text{(avec } A' \text{ au } \textit{punctum proximum} \text{ de l'œil)}$$

• La relation de Newton appliquée à la lentille $(\mathcal{L}_2)$, pour un œil placé au foyer image F_2' :

$$\overline{F_2'A'}.\overline{F_2A_1} = -f_2'^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{F_2A_1} = -\frac{f_2'^2}{\overline{F_2'A'}} = \frac{f_2'^2}{d_m}$$

La relation de Newton appliquée à la lentille $(\mathcal{L}_1)$: $\overline{F_1'A_1}.\overline{F_1A} = -f_1'^2$

Comme : $\overline{F_1'A_1} = \overline{F_1'F_2} + \overline{F_2A_1} = \Delta + \dfrac{f_2'^2}{d_m}$

la relation de Newton devient : $\overline{F_1A} = -\dfrac{f_1'^2}{\Delta + \dfrac{f_2'^2}{d_m}}$

• Comme $\overline{F_1A} = \overline{F_1O_1} + \overline{O_1A}$, on en déduit, puisque la position de AB correspond à une image finale $A'B'$ observée au *punctum proximum* d'un œil « normal » :

$$\boxed{(\overline{O_1A})_{\mathsf{PP}} = -f_1'.\left(1 + \frac{f_1'.d_m}{\Delta.d_m + f_2'^2}\right) = -5,16\ mm}$$

• D'où la latitude de mise au point : $\boxed{l = (\overline{O_1A})_{\mathsf{PP}} - (\overline{O_1A})_{\mathsf{PP}} = 7,4.10^{-3}\ mm = 7,7\ \mu m}$

Commentaire : la mise au point nécessite l'utilisation une vis micrométrique.

DM5 • Opt.