Devoir Surveillé n°11

Consignes de rédaction :

- aucun raisonnement, aucun point.
- Applications numériques sans unités, aucun point.
- **les résultats devront être encadrés à la règle**, les copies numérotées, portant votre nom et votre **code copie**.
- La calculatrice est autorisée.

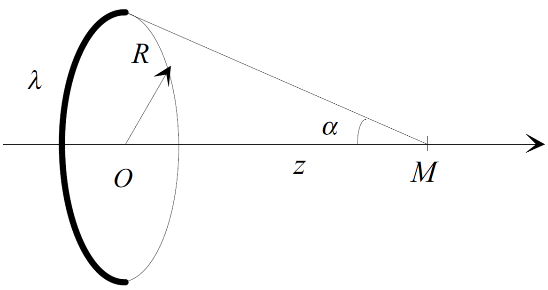
« Tous ces biens que tu désires et que tu cherches à atteindre par des détours, tu peux les avoir dès maintenant, si tu n'es pas ton propre ennemi »

▷ Marc-Aurèle – *Soliloques* < Livre XII, §1

I Champ électrostatique créé par une spire [ENSTIM 02]

A) Champ sur l'axe :

On donne une spire circulaire de rayon R, de centre O, d'axe Oz. Cette spire porte une charge positive Q répartie uniformément avec densité linéique de charge λ en $C.m^{-1}$.



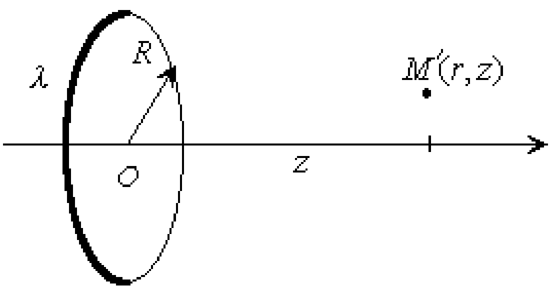
A.1) Montrer par des arguments de symétrie que, sur l'axe, le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ est porté par l'axe et prend la forme de $\overrightarrow{E} = E.\overrightarrow{e_z}$ où $\overrightarrow{e_z}$ est un vecteur unitaire porté par l'axe Oz.

A.2) Comparer $E(-z)$ et $E(z)$.

A.3) Calculer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ créé en un point M de l'axe tel que $OM = z$.
On donnera le résultat en fonction de Q, la charge totale, du rayon R, de la permittivité du vide ϵ_0 et de la distance z.

A.4) Tracer le graphe de la fonction $E(z)$.

B) Champ au voisinage de l'axe :

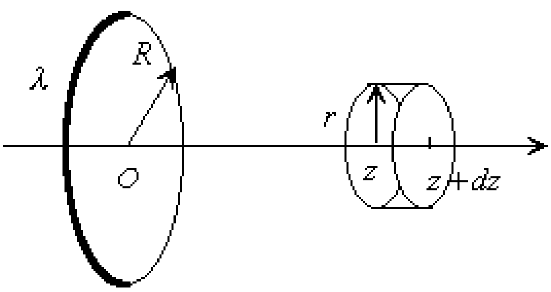


On s'intéresse maintenant au champ électrostatique au voisinage de l'axe. On calcule donc le champ en un point M' défini par des coordonnées cylindriques $(r,\, \theta,\, z)$.

B.1) Montrer par des arguments de symétrie très précis, qu'en M', le champ $\overrightarrow{E}(M')$ n'a pas de composante orthoradiale E_θ.

B.2) Montrer que la norme de $E(M')$ ne dépend que de r et z.

B.3) Montrer qu'au voisinage de l'axe, le flux du champ $\overrightarrow{E}$ est conservatif.
Que peut-on dire de sa circulation sur un contour fermé ?



B.4) Calculer le flux de $\overrightarrow{E}$ à travers une surface fermée cylindrique d'axe Oz dont les bases sont des disques de rayon r petit et de cotes z et $z + \mathrm{d}z$.
En déduire :

$$E_r(z,r) = -\frac{r}{2}.\frac{\mathrm{d}E_z(z,0)}{\mathrm{d}z}$$

➜ Calculer alors l'expression de $E_r(z,r)$ en fonction de Q, ϵ_0, R, r et z.

B.5) À l'aide d'un logiciel de simulation, on trace les lignes de champ et les équipotentielles dans le plan (Oyz).
B.5.a) **Sur la feuille donnée en annexe page 8 et à joindre à la copie**, préciser les lignes de champ avec des flèches en supposant $\lambda > 0$.

B.5.b) Qu'obtiendrait-on comme allure de lignes de champ à grande distance ?

B.5.c) Qu'obtiendrait-on comme allure d'équipotentielles à grande distance ?

B.5.d) Montrer que les lignes de champs sont perpendiculaires aux équipotentielles. Que se passe-t-il au centre ?

B.5.e) Justifier le fait que les lignes de champ se rapprochent puis s'éloignent de l'axe. On pourra utiliser l'expression de $E_r(z, r)$ déterminée dans la question **B.4)**.

II Fil et cylindre

Les vecteurs seront explicités dans la base orthonormée directe cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$.

1) Modélisation filiforme :
Établir, pour tout point M de l'espace, le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ créé par un fil infiniment long selon (Oz) portant une densité linéique de charge λ uniforme.

2) Modélisation surfacique :
2.a) Établir, pour tout point M de l'espace, le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ créé par un cylindre infini d'axe (Oz), de rayon a et portant une densité surfacique de charge σ uniforme (distribution $\mathcal{D}$).

2.b) D'après **2.a)**, trouver l'expression appelée « relation de passage » en $r = a$:

$$\overrightarrow{E}_{(r=a^+)} - \overrightarrow{E}_{(r=a^-)} = ?$$

2.c) Établir le potentiel électrostatique pour tout point M de l'espace créé par le cylindre infini. On prendra $V(r = a) = 0$.

2.d) Tracer $E(r)$ et $V(r)$.

3) Passage d'une modélisation à l'autre :
Lorsque $a \to 0$, la distribution $\mathcal{D}$ précédente s'assimile à un fil. Alors la charge Q portée par un tronçon de hauteur h répartie surfaciquement avec la densité σ semble être portée par une portion h de fil avec la densité λ.
➜ Établir la relation entre σ, λ et a permettant de passer de la modélisation surfacique à la modélisation linéique.
➜ Retrouver alors, grâce à la question **2.a)** le résultat de la question **1)**.

III Atomes Légers [ENAC 05, q. 25-29]

Du point de vue du potentiel et du champ électrique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge *à l 'intérieur* d'une sphère de centre O et de rayon a. On désigne par $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OP}$, le vecteur position d'un point P quelconque de l'espace. Pour $r < a$, la charge volumique $\rho(P)$ qui représente le noyau varie en fonction de r suivant la loi :

$$\rho = \rho_0 . \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

où ρ_0 est une constante positive.

1) Exprimer la charge totale Q du noyau.

A) $Q = \frac{1}{3}.\pi.\epsilon_0.\rho_0.a^3$ B) $Q = \frac{8}{15}.\pi.\rho_0.a^3$ C) $Q = \frac{3}{5}.\pi.\epsilon_0.\rho_0.a^3$ D) $Q = \frac{\rho_0.a^3}{2\pi}$

2) Les propriétés de symétrie du champ électrostatique permettent d'affirmer que :
A) Le champ électrique est contenu dans les plans de symétries des charges.
B) Le champ électrique est orthogonal aux plans d'anti-symétries des charges.
C) Le champ électrique est orthogonal aux plans de symétries des charges.
D) Le champ électrique est contenu dans les plans d'anti-symétries des charges.

3) Calculer le champ électrique $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}(P)$ en tout point P extérieur à la sphère ($r > a$).

A) $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}(P) = \frac{\rho_0.2a^3}{15\epsilon_0.r^3}.\overrightarrow{r}$ B) $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}(P) = \frac{\rho_0.a^3}{2\pi.\epsilon_0.r^2}.\overrightarrow{r}$

C) $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}(P) = \frac{\rho_0.2\pi.a^2}{\epsilon_0.r^2}.\overrightarrow{r}$ D) $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}(P) = \overrightarrow{0}$

4) Calculer le champ électrique $\overrightarrow{E}_{\text{int}}(P)$ en tout point P intérieur à la sphère ($r < a$).

A) $\overrightarrow{E}_{\text{int}}(P) = \frac{\rho_0}{2\pi.\epsilon_0}.\left(\frac{2}{3} - \frac{3r^2}{4a^2}\right).\overrightarrow{r}$ B) $\overrightarrow{E}_{\text{int}}(P) = \frac{3\rho_0}{2\pi.\epsilon_0}.\left(\frac{3}{4} - \frac{4r^2}{3a^2}\right).\overrightarrow{r}$

C) $\overrightarrow{E}_{\text{int}}(P) = \frac{\rho_0}{\pi.\epsilon_0}.\left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right).\overrightarrow{r}$ D) $\overrightarrow{E}_{\text{int}}(P) = \overrightarrow{0}$

5) Exprimer le potentiel $V_{\text{ext}}(P)$ créé par le noyau lorsque $r > a$.

A) $V_{\text{ext}}(P) = \frac{\rho_0.a^2}{4\pi.\epsilon_0}$ B) $V_{\text{ext}}(P) = \frac{4\rho_0.a^2}{3\pi.\epsilon_0.r}$

C) $V_{\text{ext}}(P) = \frac{\rho_0.2a^3}{15.\epsilon_0.r}$ D) $V_{\text{ext}}(P) = \frac{\pi.\rho_0.a^2}{3.\epsilon_0.r}$

6) Exprimer le potentiel $V_{\text{int}}(P)$ créé par le noyau lorsque $r < a$.

A) $V_{\text{int}}(P) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}.\left(\frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2}\right)$ B) $V_{\text{int}}(P) = \frac{\rho_0}{4\pi.\epsilon_0}.\left(\frac{a^2}{3} + \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{a}\right)$

C) $V_{\text{int}}(P) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}.\left(\frac{a^2}{6} - \frac{r^3}{3} + \frac{r}{3a}\right)$ D) $V_{\text{int}}(P) = \frac{4\pi.\rho_0}{\epsilon_0}.\left(\frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{4a^2}\right)$

IV Système Glace/Eau liquide dans un calorimètre

Un vase parfaitement calorifugé de capacité thermique $C = 120\ J.K^{-1}$, contient $m_1 = 200,0\ g$ d'eau (liquide) de capacité thermique massique $c_e = 4\,185\ J.K^{-1}.kg^{-1}$
La température d'équilibre s'établit à $\theta_1 = 18°C$.
On y introduit alors un cube de glace de masse $m_2 = 96,0\ g$ pris initialement à la température $\theta_2 = -10°C$ et on agite jusqu'à obtention d'un nouvel équilibre thermique.
La capacité thermique massique de la glace est $c_g = 2\,090\ J.K^{-1}.kg^{-1}$; et la chaleur latente de fusion est , à $\theta_0 = 0°C$ et sous la pression atmosphérique normale : $L_f = 333\ kJ.kg^{-1}$.

1) On suppose dans un premier temps que toute la glace fond. Déterminer, lorsque cet équilibre hypothétique est atteint, la température finale θ_f (en degrés Celsius). Commentaire ?

2) On suppose désormais que seulement une partie (x grammes) de glace a fondu. Déterminer la température θ_f ainsi que les masses d'eau liquide m_e et de glace m_g dans cet état final.

Commentaire ?

3) Calculer (littéralement et numériquement) la variation d'entropie, pour le système { eau liquide + glace + calorimètre }, consécutive à l'introduction de la glace. Commentaire ?

V Climatiseur réversible [ENSTIM 02]

On s'intéresse au fonctionnement d'un appareil de climatisation, dont le but est de maintenir une température constante ($T_0 = 20°C$) dans un local été comme hiver.
Le climatiseur fonctionne donc en pompe à chaleur l'hiver, en machine frigorifique l'été.
Les transferts thermiques du climatiseur se font avec 2 sources :

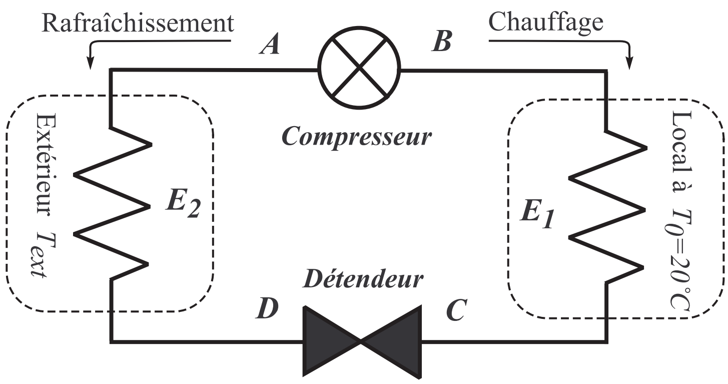
- L'intérieur de la pièce (à T_0)
- L'atmosphère extérieure (on prendra $T_{ext} = T_1 = 0°C$ en hiver ; $T_{ext} = T_2 = 40°C$ en été afin de prévoir des conditions « extrêmes »).

Le fluide caloporteur qui effectue des cycles dans l'appareil est l'ammoniac. Ses caractéristiques thermodynamiques sont résumées dans le diagramme entropique $T(s)$ où sont représentées :

- les isenthalpiques (« H » est donné en kJ/kg [il s'agit donc de l'enthalpie massique h]) ;
- les isobares (représentées par _ . _ . _ . _ . _ dans le domaine « vapeur sèche »).

On donne, par ailleurs, les pressions de vapeur saturante $P^*(T)$ aux trois températures d'étude :
$P_1 = P^*(0°C) = 4,3\ bars$ $\qquad P_0 = P^*(20°C) = 8,2\ bars$ $\qquad P_2 = P^*(40°C) = 15\ bars$

On se limitera à l'étude du climatiseur en régime permanent. Par un jeu de vannes adéquat, le fluide peut circuler dans un sens pour chauffer la pièce (A, B, C, D, A) ; dans l'autre sens pour la rafraîchir (B, A, D, C, B).



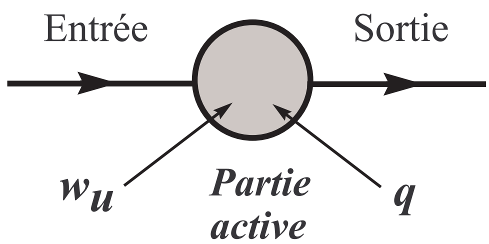
Le circuit comporte 2 parties isobares :

- L'une à la pression de vapeur saturante de l'ammoniac à $T_0 = 20°C$ (côté local) ;
- L'autre à la pression de vapeur saturante de l'ammoniac à T_{ext} (côté atmosphère extérieure).

Par ailleurs, lorsqu'on néglige les variations d'énergie cinétique et les variations d'altitude, on rappelle qu'à la traversée d'une partie active (compresseur, détendeur ou échangeur) l'énergie reçue par le fluide circulant en régime permanent vérifie :

$$\Delta h = h_s - h_e = w_u + q$$

si h_e et h_s sont les enthalpies massiques du fluide à l'entrée et à la sortie ; w_u et q étant le travail et la chaleur utiles reçus (c'est-à-dire échangés avec l'extérieur du circuit, excluant le travail des forces de pression du fluide en amont et en aval de la partie active) par kilogramme de fluide traversant la partie active.



Le fluide subit des échanges de chaleur isobares (sans recevoir de travail utile) dans ***les échangeurs* $\mathbf{E_1}$** et **$\mathbf{E_2}$** avec les 2 sources de chaleur (local et atmosphère extérieure). Un système de ventilation permet d'améliorer les échanges thermiques : ***la température du fluide est celle de la source d'échange à la sortie de chacun d'entre eux***.

Le compresseur comprime de manière adiabatique quasi-statique le fluide à l'état gazeux de la plus faible à la plus forte pression. L'unité de masse de fluide traité y reçoit le travail utile w_u.
Le fluide subit une détente adiabatique, sans échange de travail utile, dans ***le détendeur*** (la détente est donc isenthalpique).

A) Généralités :

A.1) En deux phrases de rédaction : Comment réalise-t-on un détendeur (détente isenthalpique d'un fluide) ? Quel autre nom porte une telle détente ?

A.2) Le premier principe de thermodynamique est bien vérifié dans une partie active ; c'est pourtant Δh (et non Δu) qui est égal à $w_u + q$ ... Faire une démonstration complète et rigoureuse de cette relation.

A.3) En supposant que l'ammoniac, à l'état gazeux dans le compresseur, est assimilable à un gaz parfait de cœfficient adiabatique γ constant, exprimer le rapport $\frac{T_s}{T_e}$ (des températures absolues de sortie et d'entrée dans le compresseur) en fonction de γ et de $\frac{P_s}{P_e}$ (rapport des pressions de sortie et d'entrée du compresseur).

A.4) Par lecture du graphe, déduire (avec une précision de 10 $kJ.kg^{-1}$) les enthalpies massiques de vaporisation (= chaleurs latentes de vaporisation) de l'ammoniac à $T_1 = 0°C$, $T_0 = 20°C$ et $T_2 = 40°C$.
Les paliers de vaporisation qui viennent d'être considérés permettent de trouver quelles courbes correspondent, dans le domaine « vapeur sèche », aux isobares P_1, P_0 et P_2 : placer les valeurs de ces trois isobares sur le graphe.

B) Fonctionnement hivernal du climatiseur (chauffage) :

Dans ce cas :

- l'échangeur $\mathbf{E_1}$ est un ***condenseur*** : l'ammoniac y entre en B sous forme de vapeur sèche ; il en ressort sous forme de liquide saturant en C, à la température T_0 du local ;
- l'échangeur $\mathbf{E_2}$ est un ***évaporateur*** : le mélange liquide + vapeur qui entre en D se vaporise totalement pour ressortir sous forme de vapeur saturante en A à la température de l'atmosphère extérieure $T_1 = 0°C$.

B.1) Tracer le cycle (en l'orientant et **en justifiant**) de l'ammoniac sur le diagramme entropique (y faire apparaître les points A, B, C et D).
Trouver graphiquement la température T_B de l'ammoniac à la sortie du compresseur.

B.2) Déterminer (graphiquement), pour 1 kg d'ammoniac traité (on rappelle que $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$ et le compresseur sont des parties actives) :

- Le travail w_u fourni par le compresseur au fluide ;
- La chaleur q_c reçue par le fluide (de la part du local) lors du passage dans l'échangeur $\mathbf{E_1}$;
- La chaleur q_f reçue par le fluide (de la part de l'extérieur) lors de son passage dans $\mathbf{E_2}$.

→ Faire ensuite un bilan énergétique du cycle.

B.3) Définir et calculer le cœfficient de performance (= efficacité thermique) η du climatiseur.

B.4) Démontrer et calculer quel serait le cœfficient de performance η_C si le fluide effectuait des cycles de Carnot en effectuant les échanges thermiques avec les mêmes sources de chaleur ?
En quoi le cycle effectué diffère-t-il d'un cycle de Carnot ?

B.5) Quelle est la fraction massique de vapeur $x_V(D)$ à la sortie du détendeur ?
On demande une démonstration complète et précise.

B.6) En utilisant le résultat de la question **A.3)**, évaluer l'indice adiabatique γ du gaz ammoniac.

C) Fonctionnement estival du climatiseur (rafraîchissement) :

Les rôles des 2 échangeurs sont inversés : $\mathbf{E_1}$ est un ***évaporateur*** ; $\mathbf{E_2}$ un ***condenseur***.
La condensation est toujours totale : le fluide à la sortie du condenseur est sous forme de liquide saturant.
De même l'évaporation est complète : le fluide à la sortie de l'évaporateur est sous forme de vapeur saturante limite.

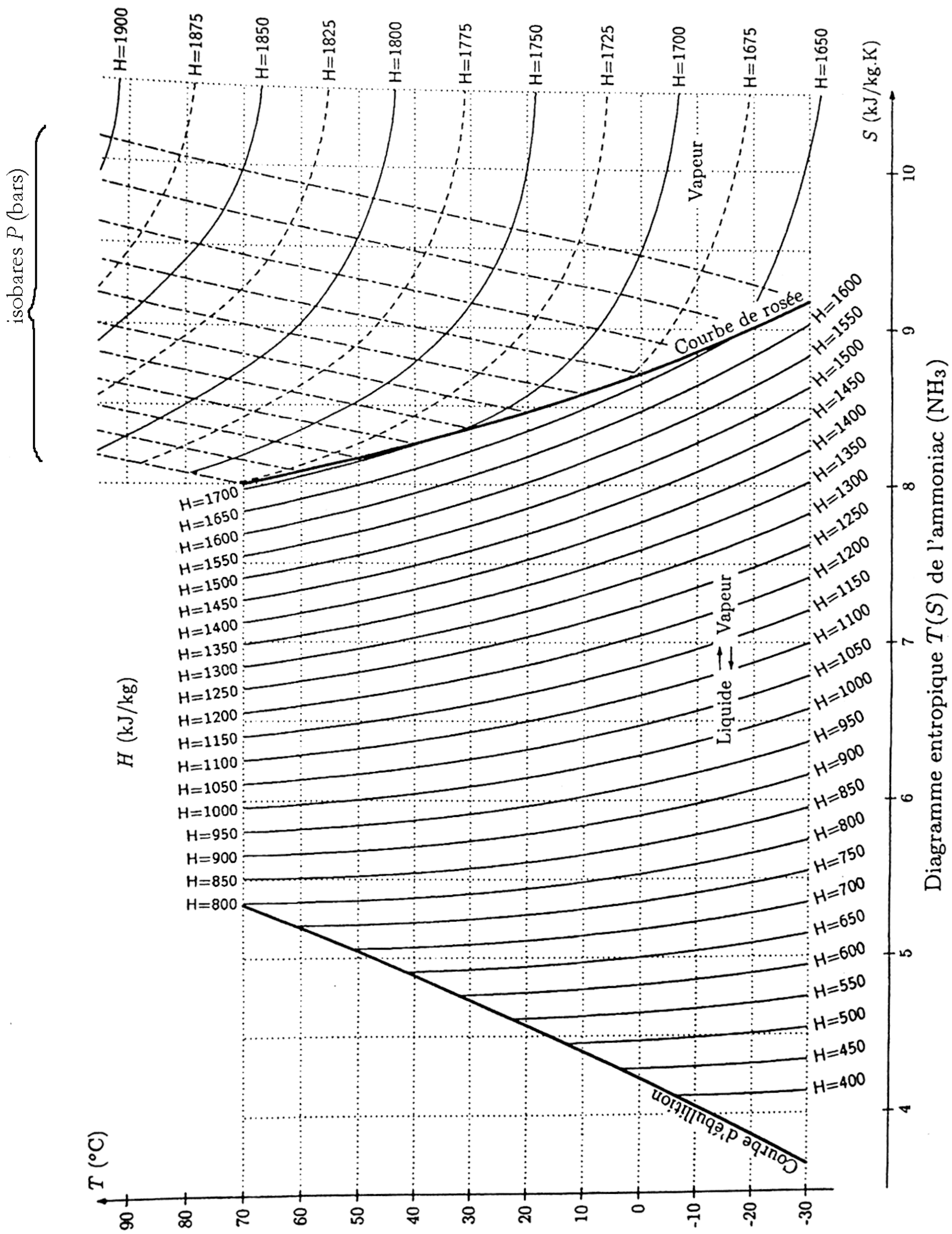
C.1) Tracer le cycle (en l'orientant et **en justifiant**) de l'ammoniac sur le diagramme entropique ; on affectera les points de l'indice ´ : $(B' \rightarrow A' \rightarrow D' \rightarrow C' \rightarrow B')$.
Préciser les états physique en chacun des quatre points particulier du cycle (vapeur saturante ? liquide saturant ? vapeur sèche ? mélange liquide + vapeur ?)
Déterminer graphiquement les enthalpies massiques $h(A')$, $h(B')$, $h(C')$ et $h(D')$.
Déterminer graphiquement la température T'_A à la sortie du compresseur.

C.2) Déterminer (graphiquement), pour 1 kg d'ammoniac traité (même remarque qu'en **B.2)**) :
- Le travail w'_u fourni par le compresseur ;
- La chaleur q'_1 reçue par le fluide (de la part de la pièce) lors du passage dans l'échangeur $\mathbf{E_1}$;
- La chaleur q'_2 reçue par le fluide (de la part de l'extérieur) lors du passage dans $\mathbf{E_2}$.

C.3) Définir et calculer le nouveau coefficient de performance (= efficacité frigorifique) η' du climatiseur.

C.4) Quel serait le nouveau cœfficient de performance η'_C si le fluide effectuait des cycles de Carnot en effectuant les échanges thermiques avec les mêmes sources de chaleur ?

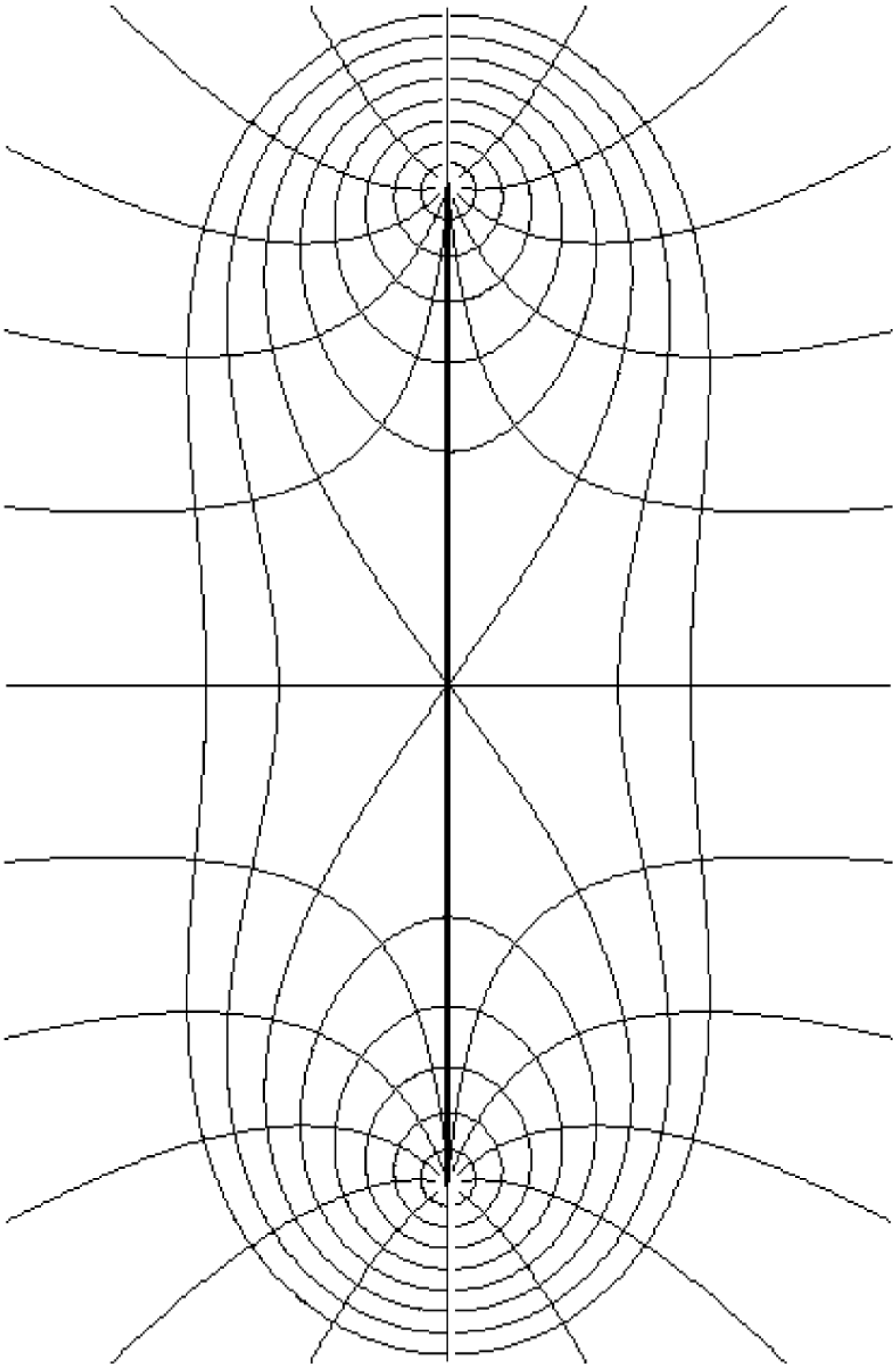
Feuille de réponse pour l'exercice V, questions A.4), B.1) et C.1)



NOM :

Prénom :

Classe / Code Copie :



Lignes de champ électrostatique / Equipotentielles