

# Correction DS n°11

## I Champ électrostatique créé par une spire [ENSTIM 02]

### A) Champ sur l'axe :

**A.1)** Tous les plans contenant l'axe  $Oz$  sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Comme ces plans passent par  $M \in Oz$ , le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  appartient à ces plans, dont à leur intersection, donc à la droite  $(Mz)$  :  $\forall M(0, 0, z) \quad \vec{E}(M) = \vec{E}_{\text{axe}} = E(z) \cdot \vec{e}_z$

**A.2)** Le plan  $(\Pi_0) = (Oxy)$  est un plan de symétrie de la distribution de charges, donc également plan de symétrie du champ électrique.

Donc, avec  $N(0, 0, -z)$  est le symétrique de  $M(0, 0, z)$  par rapport à  $(\Pi_0)$  :

$$\vec{E}(N) = \begin{cases} \text{sym}_{(\Pi_0)}(\vec{E}(M)) = -E(z) \cdot \vec{e}_z \\ E(-z) \cdot \vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow \boxed{E(-z) = -E(z)}$$

**A.3)** On applique la loi de Coulomb, en appelant  $P$  un point quelconque de la distribution de charges, et en se limitant à la recherche de la composante du champ selon  $Oz$  (la seule à être non nulle) :

$$\begin{aligned} E(M) = E_z = \vec{E}_{\text{axe}} \cdot \vec{e}_z &= \left( \oint_{P \in \mathcal{D}} \frac{dq(P)}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2} \right) \cdot \vec{e}_z \\ &= \oint_{P \in \mathcal{D}} \frac{\lambda \cdot dl}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_{P \rightarrow M} \cdot \vec{e}_z}{PM^2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left( \oint_{P \in \mathcal{D}} dl \right) \cdot \frac{\cos \alpha}{PM^2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \cdot 2\pi \cdot R \cdot \frac{z}{PM^3} \\ &= \frac{\lambda \cdot R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{e}_z} \end{aligned}$$

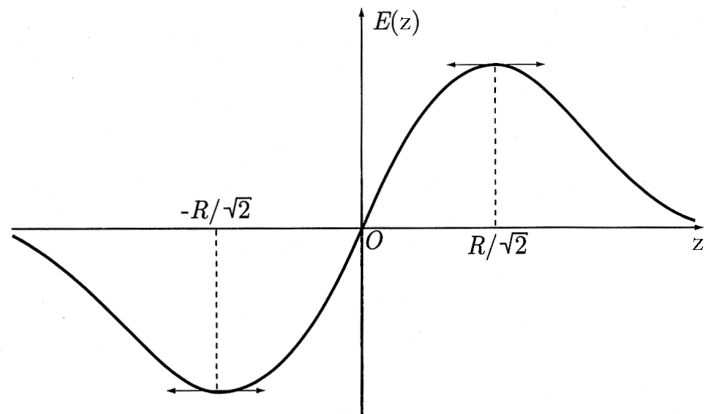
On constate que l'expression  $E(z)$  obtenue est bien une fonction impaire de  $z$ .

**A.4)** Le graphe est tracé ci-contre.

**B.1)** L'unique plan de symétrie de la distribution de charge passant par  $M'$  est le plan  $(M', \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ .

Donc le champ électrique en  $M'$  est contenu dans ce plan :

$$\text{CI : } \begin{cases} \vec{E}(M') = E_r(M') \vec{e}_r + E_z(M') \vec{e}_z \\ \boxed{E_\theta(M') = \vec{E}(M') \cdot \vec{e}_\theta = 0} \quad \textcircled{1} \end{cases}$$



**B.2)** La distribution de charge est invariante pour toute rotation autour de l'axe  $Oz$ , donc :

$$\forall M'(r, \theta, z) \quad \vec{E}(M') = \vec{E}(r, z) \quad \textcircled{2}$$

**Rq :**  $\textcircled{1}$   $\textcircled{2}$  donnent :  $\forall M'(r, \theta, z) \quad \vec{E}(M') = E_r(z, r) \vec{e}_r + E_z(z, r) \vec{e}_z$

**B.3)** • Au voisinage de l'axe, comme on est en dehors des sources du champ, le théorème de Gauss conduit à :

$$\oint_S \vec{E}(P) \cdot dS \vec{n}_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0$$

**CI :** Le flux du champ électrique est nul sur une telle surface fermée (choisie en dehors des sources), donc : **le flux du champ  $\vec{E}$  est conservatif.**

• Le champ électrostatique dérivant d'un potentiel électrique, sa **circulation** est conservative par propriété. Elle est donc **nulle sur un contour fermé** :

$$\oint_C \vec{E}(P) \cdot d\vec{l} = \oint_C -\vec{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = \oint_C -dV = -\Delta V_{A \rightarrow A} = 0$$

**B.4)** Pour  $r$  et  $dz$  « petits » ( $r \rightarrow 0$  et  $dz \ll z$ ), le théorème de Gauss :

$$\oint_S \vec{E}(P) \cdot dS \vec{n}_{\text{ext}} = 0$$

devient :

$$\int_{\substack{z_P = z \\ r_P \in [0, r]}} \vec{E}(P) \cdot dS (-\vec{e}_z) + \int_{\substack{z_P \in [z, z + dz] \\ r_P = r}} \vec{E}(P) \cdot dS \vec{e}_{r_P} + \int_{\substack{z_P = z + dz \\ r_P \in [0, r]}} \vec{E}(P) \cdot dS \vec{e}_z = 0$$

Soit, en prenant pour chacune des trois somme le terme prépondérant :

$$\int_{\substack{z_P = z \\ r_P \simeq 0}} -E_z(z, 0) \cdot dS + \int_{\substack{z_P \simeq z \\ r_P = r}} E_r(z_P, r) \cdot dS + \int_{\substack{z_P = z + dz \\ r_P \simeq 0}} E_z(z + dz, 0) \cdot dS = 0$$

$$\Rightarrow [E_z(z + dz, 0) - E_z(z, 0)] \cdot \pi r^2 + E_r(z, r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot dz = 0 \Leftrightarrow \frac{dE_z(z, 0)}{dz} \cdot dz \cdot r + E_r(z, r) \cdot 2 \cdot dz = 0$$

**CI :** 
$$E_r(z, r) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{dE_z(z, 0)}{dz}$$

On peut en déduire que pour  $r$  petit :

$$E_r(z, r) = -\frac{r}{2} \cdot \frac{d}{dz} \left( \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = -\frac{Q \cdot r}{8\pi\epsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + z \cdot \left( -\frac{3}{2} \right) \cdot \frac{2z}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right)$$

Soit : 
$$E_r(z, r) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{r \cdot (2z^2 - R^2)}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

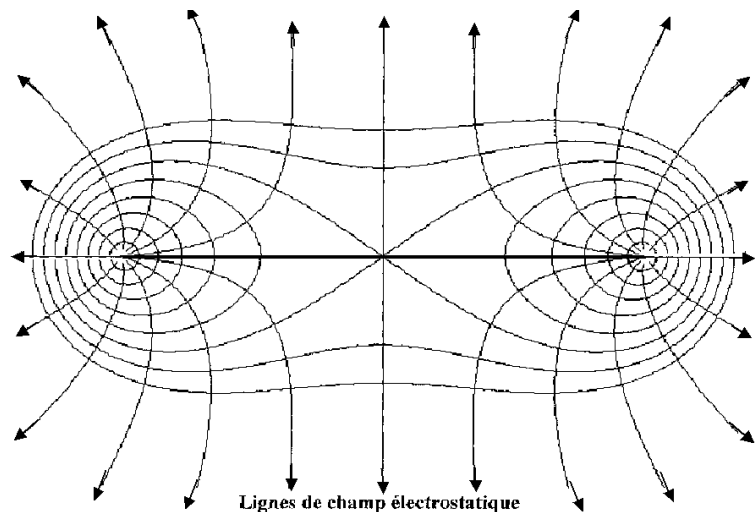
**B.5.a)** Voir ci-contre.

**B.5.b)** À grande distance, les lignes de champ sont semblables à celles d'une charge ponctuelle  $Q$  située en  $O$  : elles sont voisines des droites passant par  $O$ .

**B.5.c)** À grande distance, les équipotentielles sont semblables à celles d'une charge ponctuelle  $Q$  située en  $O$  : elles sont voisines de sphères centrées sur  $O$ .

**B.5.d)** Un tout petit déplacement dans le plan tangent à une équipotentielle satisfait à  $dV = 0$ , soit  $-\vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = 0$ .

Donc  $\vec{E}(M)$  est perpendiculaire à  $d\vec{l}$  défini dans le plan tangent à une équipotentielle.



**Cl : les lignes de champs**, tangentes en chacun de leur point au champ électrique, **sont perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.**

Ce raisonnement n'étant valable que pour un champ électrique non nul, cette propriété n'est pas vérifiée en  $O$ .

**B.5.e)** Quand on s'éloigne de  $O$  :

- les lignes de champ voisines de l'axe s'en rapprochent si  $E_r < 0$ , c'est-à-dire lorsque  $|z| < \frac{R}{\sqrt{2}}$

- et elles s'en écartent si  $E_r > 0$ , c'est-à-dire lorsque  $|z| > \frac{R}{\sqrt{2}}$ .

**Rq :** Ceci résulte en fait de la conservation du flux du champ électrique dans un tube de champ de petite section et de révolution autour de  $Oz$  : Les lignes de champ se rapprochent de l'axe quand le champ devient plus intense et s'en écartent quand le champ devient moins intense : voir le graphe de la question **B.5.a)**.

## II Fil et cylindre

**1) • Invariances :** la distribution de charge  $\mathcal{D}$  est invariante :

- pour toute rotation autour de  $Oz$
- pour toute translation selon  $Oz$

Donc :  $\forall M \in \mathcal{E} \quad \vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta, z) = \vec{E}(r)$  ①

**• Symétries :**

Les plans  $(\Pi_1) = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  et  $(\Pi_2) = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  sont des plans de symétrie des charges passant par  $M$ .

Le champ  $\vec{E}(M)$  appartient donc à ces plans, donc à leur intersection  $(M, \vec{e}_r)$ .

Donc :  $\forall M \in \mathcal{E} \quad \vec{E}(M) = E_r \cdot \vec{e}_r = E \cdot \vec{e}_r$  ②

**Cl :** ① & ② :  $\vec{E}(M) = E(r) \cdot \vec{e}_r$

**• Surface de Gauss :**

Cylindre d'axe  $Oz$ , de hauteur  $h$ , de rayon  $r$ , de section  $S_1$  et  $S_2$ , dont la surface latérale  $S_l$  passe par  $M$  :  $\mathcal{S} = S_1 \cup S_l \cup S_2$

**• Théorème de Gauss :**

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E}(P) \cdot dS \vec{n}_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Soit :  $\int_{S_1} E(r_P) \vec{e}_r \cdot dS_1 \vec{e}_z + \int_{S_l} E(r_P) \vec{e}_r \cdot dS_l \vec{e}_r + \int_{S_2} E(r_P) \vec{e}_r \cdot dS_2 (-\vec{e}_z) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

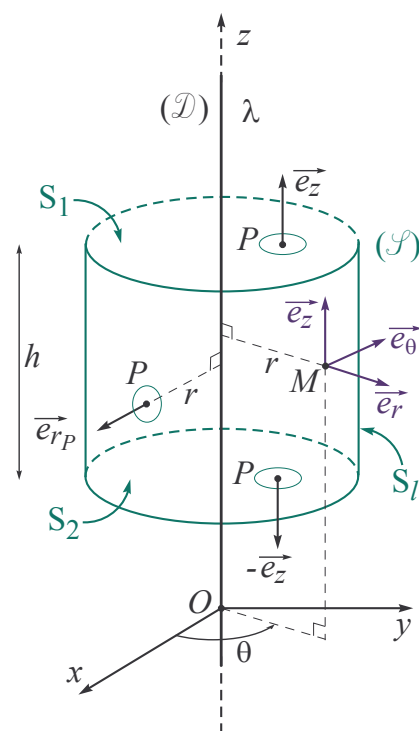
Comme  $\forall P \in S_l \quad r_P = r$ , on peut sortir  $E(r_P) = E(r)$  de la somme sur la surface latérale  $S_l = 2\pi \cdot r \cdot h$ .

On obtient :  $E(r) \cdot \int_{S_l} dS_l = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow E(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot h = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (*) \quad \xrightarrow{Q_{\text{int}} = \lambda \cdot h} \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}$

Soit :  $\forall M / r \neq 0 \quad \vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \cdot \vec{e}_r$

**2.a) •** La distribution et donc le champ étant à symétrie cylindrique, le théorème de Gauss conduit encore à la relation  $(*)$  :  $E(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot h = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

**• Cas  $r < a$  :**  $Q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow E(r) = 0$       **• Cas  $r > a$  :**  $Q_{\text{int}} = \sigma \cdot 2\pi \cdot a \cdot h \Rightarrow E(r) = \frac{\sigma \cdot a}{\epsilon_0 \cdot r}$



$$\text{D'où : } \begin{cases} \vec{E}(r < a) = \vec{0} \\ \vec{E}(r > a) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{a}{r} \cdot \vec{e}_r \end{cases}$$

$$\text{2.b) } \vec{E}(r=a^+) - \vec{E}(r=a^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{e}_r$$

On vérifie la relation de passage du champ électrostatique à la traversée d'une surface chargée :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

$$\text{2.c) } \bullet \forall M \quad \vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}}_M V \Rightarrow E(r) = -\frac{dV}{dr}$$

$$\bullet \text{ Cas } r \leq a : \frac{dV}{dr} = 0 \Rightarrow V(r) = \text{Cte} = V_0$$

$$\bullet \text{ Cas } r > a : \frac{dV}{dr} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{a}{r} \Rightarrow V(r) = -\frac{\sigma \cdot a}{\epsilon_0} \cdot \ln(r) + V_1$$

Comme  $V(a^-)$  et  $V(a^+)$  existent, ces valeurs sont égales (lorsque le potentiel existe, il est continu) :

$$V_0 = V(a^-) = V(a^+) = -\frac{\sigma \cdot a}{\epsilon_0} \cdot \ln(a) + V_1 \xrightarrow{V(a)=0} V_1 = \frac{\sigma \cdot a}{\epsilon_0} \cdot \ln(a)$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} V(r < a) = 0 \\ V(r > a) = \frac{\sigma \cdot a}{\epsilon_0} \cdot \ln\left(\frac{a}{r}\right) \end{cases}$$

2.d) Cf. ci-contre.

3) Pour avoir équivalence entre la modélisation surfacique et la modélisation linéique, il faut qu'un tronçon de hauteur  $h$  porte une charge identique :

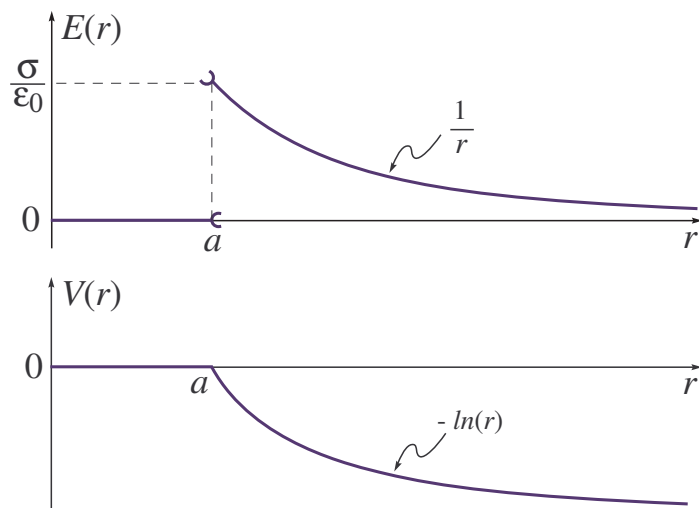
$$Q = \lambda \cdot h = \sigma \cdot 2\pi \cdot a \cdot h$$

$$\text{Soit : } \lambda = 2\pi \cdot a \cdot \sigma$$

dans le cas  $a \rightarrow 0$  les résultats de 2.a) conduisent à, pour  $r > a$  (soit :  $r > 0$ ) :

$$\vec{E}(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot \frac{a}{r} \cdot \vec{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \cdot \frac{a}{r} \cdot \vec{e}_r \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot r} \cdot \vec{e}_r$$

On retrouve bien le champ créé par un fil infiniment long de densité de charge linéique  $\lambda$ .



### III Atomes Légers [ENAC 05, q. 25-29]

1) La charge totale du noyau est (en coordonnées sphériques) :

$$\begin{aligned} Q &= \int dq(P) = \int \rho(r) d\tau = \int \rho(r) r^2 dr \cdot \sin \theta d\theta \cdot d\varphi \\ &= \int_0^a \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \rho_0 \left[ \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right]_0^a \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \boxed{Q = \frac{8}{15} \pi \rho_0 a^3} \quad \text{Rép. B)}$$

- 2)  $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\text{Rép. A)}} \text{ Le champ électrique est contenu dans les plans de symétries des charges.} \\ \boxed{\text{Rép. B)}} \text{ Le champ électrique est orthogonal aux plans d'anti-symétries des charges.} \end{array} \right.$

3) •  $(\Pi_1) = (P, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  et  $(\Pi_2) = (P, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi)$  sont des plans de symétrie des charges qui passent par  $P$ , donc :  $\vec{E}(P) \subset ((\Pi_1) \cap (\Pi_2)) = (P, \vec{e}_r)$ , soit :  $\vec{E}(P) = E(P)\vec{e}_r$  (★).

Par ailleurs, la distribution de charges est invariante pour toute rotation autour de n'importe quel axe passant par  $O$ , d'où :  $\vec{E}(P) = \vec{E}(r, \theta, \varphi) = \vec{E}(r)$  (★★).

(★) et (★★) :  $\forall P, \vec{E}(P) = E(r)\vec{e}_r$ .

• Théorème de GAUSS :

$$\oint_S \vec{E}(M) \cdot dS \vec{n}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \oint_S E(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \boxed{4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}} \quad \text{①}$$

• Pour  $r > a$ ,  $\boxed{Q_{int} = Q}$ , et ① donne :  $\boxed{\vec{E}_{ext}(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^3} \vec{r}}$  **Rép. A)**

4) • Pour  $r < a$  :

$$Q_{int} = \int dq = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r'^2}{a^2}\right) r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} = 4\pi\rho_0 \left[\frac{r'^3}{3} - \frac{r'^5}{5a^2}\right]_0^r = 4\pi\rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2}\right)$$

• ① donne :  $\boxed{\vec{E}_{int}(P) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2}\right) \vec{e}_r = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right) \vec{r}}$  **Rép. C)**

5)  $V_{ext}(P)$  est tel que :  $\vec{E}_{ext}(P) = -\overrightarrow{grad} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ .

Soit, pour  $r > a$  :  $\frac{dV}{dr} = -\frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2} \Leftrightarrow V_{ext} = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r} + K$ .

Comme la distribution est limitée, on peut choisir  $V_{ext}(\infty) \equiv 0$ , ce qui impose  $\boxed{K = 0}$

Donc :  $\boxed{V_{ext}(P) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r}}$  **Rép. C)**

6)  $V_{int}(P)$  est tel que :  $\vec{E}_{int}(P) = -\overrightarrow{grad} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2}\right) \vec{e}_r$ .

Soit, pour  $r \leq a$  :  $\frac{dV}{dr} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{5a^2} - \frac{r}{3}\right) \Leftrightarrow V_{int} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^4}{20a^2} - \frac{r^2}{6}\right) + K'$ .

On détermine la constante d'intégration  $K'$  en rappelant que le potentiel est continu à la traversée de la distribution :

$$V_{int}(r = a) = V_{ext}(r = a) \Leftrightarrow K' + \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{a^4}{20a^2} - \frac{a^2}{6}\right) = \frac{2\rho_0 a^2}{15\epsilon_0}$$

Soit :  $\boxed{K' = \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0} \frac{4}{3}}$  et  $\boxed{V_{int}(P) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2}\right)}$  **Rép. A)**

## IV Système Glace/Eau liquide dans un calorimètre

1) Si toute la glace fond, alors  $\theta_f \geq \theta_0 = 0^\circ C$ .

Le système { eau liquide + glace + calorimètre } étant calorifugé et subissant une transformation monobare :

$$0 = Q = Q_P = \Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4 + \Delta H_5$$

Avec :

- |  |  |
|--|--|
| - (1) eau qui refroidit de $\theta_1$ à $\theta_f$                       | $\Delta H_1 = m_1 \cdot c_e \cdot (\theta_f - \theta_1)$ |
| - (2) vase qui refroidit de $\theta_1$ à $\theta_f$                      | $\Delta H_2 = C \cdot (\theta_f - \theta_1)$             |
| - (3) glace qui se réchauffe de $\theta_2$ à $\theta_0$                  | $\Delta H_3 = m_2 \cdot c_g \cdot (\theta_0 - \theta_2)$ |
| - (4) fusion totale de la glace à $\theta_0$ à $\theta_f$                | $\Delta H_4 = m_2 \cdot L_f$                             |
| - (5) eau qui issue de la fusion se réchauffe de $\theta_0$ à $\theta_f$ | $\Delta H_5 = m_2 \cdot c_e \cdot (\theta_f - \theta_0)$ |

On obtient : 
$$\theta_f = \frac{(C + m_1 \cdot c_e) \cdot \theta_1 + m_2 \cdot c_g \cdot \theta_1 - m_2 \cdot L_f}{C + (m_1 + m_2) \cdot c_e} = -12,3^\circ C$$

**Commentaire :**

Comme  $\theta_f < \theta_0$ , l'hypothèse de départ est absurde : la fusion de la glace n'est pas totale.

2) Hypothèse d'une fusion partielle. La température finale est alors celle de l'équilibre solide/liquide de l'eau (sous la pression atmosphérique normale), c'est-à-dire :  $\theta_f = \theta_0$ .

Soit  $x$ , la masse de glace qui fond.

Le système { eau liquide + glace + calorimètre } étant calorifugé et subissant une transformation monobare :

$$0 = Q = Q_P = \Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4$$

Avec (1), (2) et (3) identiques aux transformations envisagées en 1) et (4) correspondant à la fusion d'une masse  $x$  de glace à  $\theta_0 = \theta_f$  :  $\Delta H_4 = x \cdot L_f$

On obtient : 
$$x = \frac{(C + m_1 \cdot c_e) \cdot \theta_1 + m_2 \cdot c_g \cdot \theta_2}{L_f} = 45,7 \text{ g}$$

**Commentaire :** Comme  $x < m_2$ , l'hypothèse est validée.

Dans l'état final, le calorimètre contient :

$$\begin{aligned} m_e &= m_1 + x = 245,7 \text{ g} \\ m_g &= m_2 - x = 50,3 \text{ g} \end{aligned}$$

3) L'entropie est une fonction d'état extensive et additive. Sa variation pour le système correspond aux variations d'entropie associées aux quatre transformations précédentes :

$$\Delta S = \Delta S_{(1)} + \Delta S_{(2)} + \Delta S_{(3)} + \Delta S_{(4)}$$

• La variation d'entropie d'une phase condensée de capacité thermique massique  $c$  et de masse  $m$  entre  $T_A$  et  $T_B$  s'écrit :

$$\Delta S_\varphi = \Delta S_{\text{rév,hyp}} = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{m \cdot c \cdot dT}{T} = m \cdot c \cdot \ln \left( \frac{T_B}{T_A} \right)$$

• Un changement d'état étant une transformation réversible isobare :

$$dS = \frac{dH - V \cdot dP}{T} = \frac{dx \cdot L_f}{T} \Rightarrow \Delta S_{(4)} = x \cdot \frac{L_f}{T_0}$$

Soit :

$$\Delta S = (C + m_1 \cdot c_e) \cdot \ln \left( \frac{T_0}{T_1} \right) + m_2 \cdot c_g \cdot \ln \left( \frac{T_0}{T_2} \right) + x \cdot \frac{L_f}{T_0} = 2,13 \text{ J.K}^{-1}$$

**Commentaire :** Puisque le système est calorifugé :  $\Delta S = \int \dot{S} > 0$  : la transformation est irréversible.

## V Climatiseur réversible [ENSTIM 02]

### A) Généralités :

**A.1)** On réalise un détendeur en opérant la diffusion d'un fluide à travers une paroi poreuse ou à travers une réduction de la section du conduit.

Il s'agit d'une détente de JOULE-THOMSON (=JOULE-KELVIN).

**A.2)** Cf. COURS+TD où à de multiples reprises a été établi le premier principe pour un système ouvert.

**A.3)** La transformation dans le compresseur est une transformation adiabatique quasi-statique (= isentropique) d'un gaz parfait.

On peut donc appliquer les lois de LAPLACE :  $PV^\gamma = C^{te}$  ou plutôt, pour cette question,  $P^{1-\gamma}T^\gamma = C^{te}$ .

$$\text{Ainsi : } P_e^{1-\gamma}T_e^\gamma = P_s^{1-\gamma}T_s^\gamma \Leftrightarrow \boxed{\frac{T_s}{T_e} = \left(\frac{P_s}{P_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

**A.4)** Les paliers de vaporisation correspondent aux segment horizontaux  $LV$  sous la courbe de saturation (car un changement d'état est une transformation isotherme (et isobare)).

• Ainsi  $L_{vap}(T_i) = h(V(T_i)) - h(L(T_i))$  pour la vaporisation à la température  $T_i$ . On a donc :

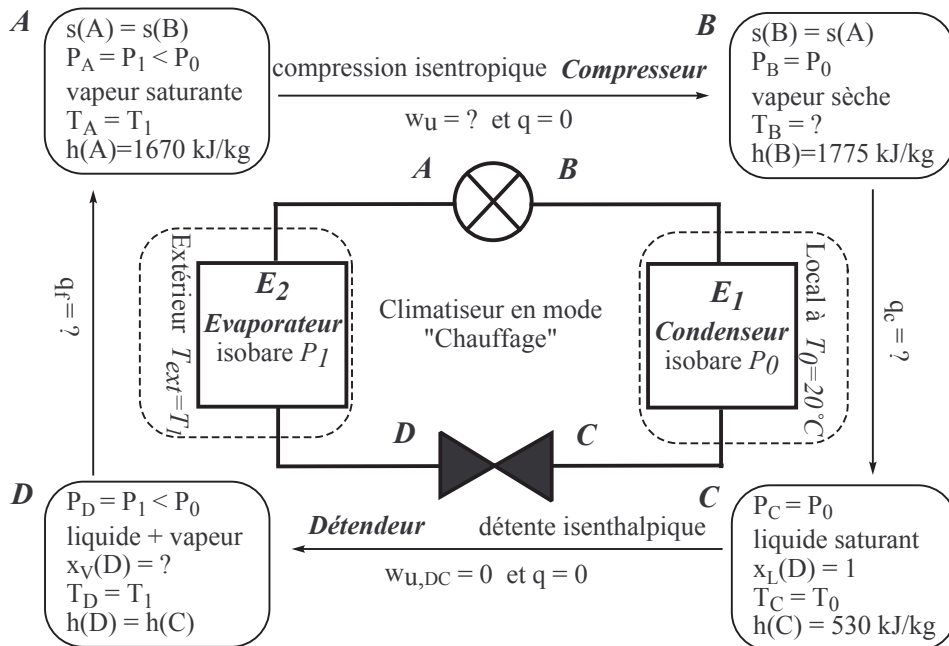
$$\boxed{L_{vap}(T_1 = 0^\circ C) \cong 1670 - 430 \cong 1240 \text{ kJ.kg}^{-1}}$$

$$\boxed{L_{vap}(T_0 = 20^\circ C) \cong 1690 - 530 \cong 1160 \text{ kJ.kg}^{-1}}$$

$$\boxed{L_{vap}(T_2 = 40^\circ C) \cong 1700 - 640 \cong 1060 \text{ kJ.kg}^{-1}}$$

• Comme un palier de vaporisation correspond également à une transformation isobare  $P^*(T_i)$ , son extrémité  $\{V\}$  indique quelle courbe isobare, dans le domaine «vapeur sèche», correspond à la valeur  $P_i = P^*(T_i)$ .

### B) Fonctionnement hivernal du climatiseur (chauffage) :



**B.1)** •  $B \rightarrow C$  est une portion de l'isobare  $P_0$  dont on ne peut pas (encore) placer le point  $B$  dans le domaine «vapeur sèche» mais dont  $C$  correspond au point  $L(T_0)$  sur la courbe d'ébullition – car le fluide sort du condenseur  $E_1$  à la température du local  $T_0$  et à l'état de liquide saturant.

•  $C \rightarrow D$  : la détente étant isenthalpique,  $h(D) = h(C)$ . Par ailleurs, comme  $D \rightarrow A$  est une isobare à la pression  $P_1$ ,  $D$  doit être à l'intersection de l'isenthalpique  $h(C) = 530 \text{ kJ.kg}^{-1}$  et

de l'isobare  $P_1$  :  $D$  est donc sur le palier de vaporisation  $P_1 = P^*(T_1)$  :  $D$  est un mélange liquide+vapeur à  $T_1$ .

•  $D \rightarrow A$  : le fluide sort de l'évaporateur  $\mathbf{E}_2$  sous forme de vapeur saturante :  $A$  est sur la courbe de rosée à  $T_1$  et  $P_1$ .

•  $A \rightarrow B$  : la compression étant isentropique (cf. **A.3**),  $s(B) = s(A)$  :  $B$  est donc à l'intersection de l'isentropique  $s(A)$  et de l'isobare  $P_0$ , dans le domaine « vapeur sèche ».

→ On en déduit :  $T_B \cong 56^\circ\text{C}$ .

**B.2)** •  $w_u = h(B) - h(A) \cong 1775 - 1670 = 105 \text{ kJ.kg}^{-1}$

•  $q_c = h(C) - h(B) \cong 530 - 1775 = -1245 \text{ kJ.kg}^{-1} < 0$  (le fluide cède de la chaleur au local)

•  $q_f = h(A) - h(D) \cong 1670 - 530 = 1140 \text{ kJ.kg}^{-1} > 0$  (le fluide reçoit de la chaleur de l'extérieur)

• Bilan énergétique pour le cycle, en se souvenant que  $C \rightarrow D$  est isenthalpique :

$$\Delta h_{cycle} = \Delta h_{AB} + \Delta h_{BC} + \Delta h_{CD} + \Delta h_{DA} = w_u + q_c + 0 + q_f = 0$$

On vérifie que l'enthalpie est une fonction d'état, ne dépendant que de l'état thermodynamique considéré, soit :  $\Delta h_{cycle} = h(A) - h(A) = 0$ .

**B.3)** Pour une pompe à chaleur,  $\eta = \frac{\text{ce qui nous intéresse}}{\text{ce qui nous coûte}} = \frac{-q_c}{w_u} = \frac{1245}{105} \approx 12$ .

**B.4)** • Un cycle de CARNOT étant réversible, l'inégalité de CLAUSIUS devient égalité de CLAUSIUS :  $\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$ , soit, ici :  $\frac{Q_c}{T_0} + \frac{Q_f}{T_1} = 0$ .

Et comme le premier principe sur un cycle impose :  $W = \Delta U - Q = 0 - Q_c - Q_f$ , on obtient :

$$\eta_C = \frac{-Q_c}{W} = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f} = \frac{Q_c}{Q_c \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right)}, \text{ soit : } \eta_C = \frac{T_0}{T_0 - T_1} = \frac{293}{293 - 273} \approx 14,6$$

• Le cycle de CARNOT est constitué de deux isotherme réversibles (une à  $T_f = T_1$  et une à  $T_c = T_0$ ) et de deux adiabatique réversibles. Mais dans le cycle étudié, deux parties sont irréversibles :

◦  $B \rightarrow C$  : tant que le fluide est une «vapeur sèche», sa température est supérieur à  $T_c = T_0$  : l'échange de chaleur n'est ni réversible ni isotherme ;

◦  $C \rightarrow D$  : la détente de JOULE-KELVIN est adiabatique, mais elle est irréversible.

**B.5)** • Sur un palier de vaporisation  $LV$  dans le diagramme entropique, où  $L$  est sur la courbe d'ébullition et  $V$  sur la courbe de rosée, **les grandeurs intensives sont toutes imposées par la seule donnée de la température** (ou de la pression) de ce palier de changement d'état – **car un corps pur diphasé est monovariant**.

• Ainsi, par exemple, l'entropie massique de la phase vapeur (ou liquide) pour n'importe quel point  $E$  du palier de changement d'état ne dépendant que de  $T$ , pour la connaître il suffit de l'identifier à l'entropie massique du point  $V$ , vapeur saturante (ou celle du point  $L$ , liquide saturant) :

$$s_V(E) = s_V(T) = s(V) = s(A) \quad \text{et} \quad s_L(E) = s_L(T) = s(L)$$

• L'entropie étant une fonction extensive, on peut exprimer sa valeur dans l'état thermodynamique  $D$  en fonction des entropies massiques de la phase vapeur et de la phase liquide ainsi que des masses des phases vapeur et liquide :  $S(D) = S_L(D) + S_V(D)$ , soit, pour le palier à la température  $T_1$  :

$$m \cdot s(D) = m_L \cdot s_L(D) + m_V \cdot s_V(D) \Leftrightarrow s(D) = x_L \cdot s(L_1) + x_V \cdot s(V_1) \Leftrightarrow s(D) = (1 - x_V) \cdot s(L_1) + x_V \cdot s(A)$$

$$\text{Soit : } x_V(D) = \frac{L_1 D}{L_1 A} = \frac{s(D) - s(L_1)}{s(A) - s(L_1)} \cong 8,5\%$$



**B.6)** En appliquant la réponse de **A.3)** à la compression isentropique  $A \rightarrow B$ , on obtient :

$$\frac{T_B}{T_A} = \left(\frac{P_B}{P_A}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \Leftrightarrow \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{\ln \frac{T_B}{T_1}}{\ln \frac{P_0}{P_1}} \Leftrightarrow \gamma = \left(1 - \frac{\ln \frac{T_B}{T_1}}{\ln \frac{P_0}{P_1}}\right)^{-1} \cong 1,4$$

**C) Fonctionnement estival du climatiseur (rafraîchissement) :**

**C.1)** • Cette fois,  $E_1$  est un *évaporateur*. La transformation  $C' \rightarrow B'$  dans  $E_1$  est toujours une isobare  $P_0$  qui correspond à la « pression de vapeur saturante de l'ammoniac à  $T_0$  » (énoncé, p.4) et la température du fluide en sortie est toujours celle du local (énoncé, p.4) : donc  $C' \rightarrow B'$  est une portion du palier de vaporisation à  $T_0$  et  $T_{B'} = T_0$ .

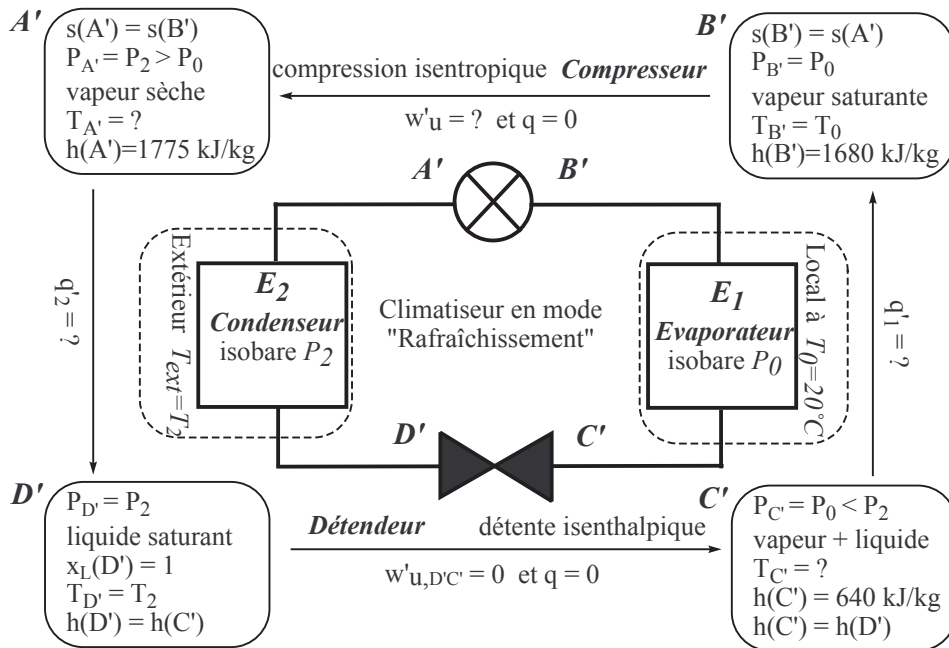
•  $B' \rightarrow A'$  : Le *compresseur* comprime toujours de manière adiabatique quasi-statique un fluide à l'état gazeux supposé parfait (énoncé, p. 5).

On en déduit donc que  $B'$  est à l'état de vapeur saturante, donc sur la courbe de rosée à la pression  $P_0$  et que  $A'$  est dans la zone « vapeur sèche » sur l'isentropique  $s(B')$ .

• La transformation  $A' \rightarrow D'$  dans  $E_2$  est toujours une isobare  $P_2$  qui correspond à la « pression de vapeur saturante de l'ammoniac à  $T_{ext} = T_2$  » (énoncé, p.4), et la température du fluide en sortie est toujours celle de l'extérieur :  $T_{D'} = T_2$  (énoncé, p. 4).

On en déduit que  $A'$  est à l'intersection de l'isobare  $P_2$  et de l'isentropique  $s(B')$ .

Comme cette fois,  $E_2$  est un *condenseur* et que la condensation est totale (cf. énoncé, p. 6),  $D'$  est à l'état de liquide saturant (sur la courbe d'ébullition donc).



• Le *détendeur* impose une détente isenthalpique  $D' \rightarrow C'$ . Donc  $h(D') = h(C')$ .

On en déduit que  $C'$  est à l'intersection de l'isenthalpique  $h(D')$  et de l'isotherme  $T_0$ .

•  $T_{A'} \cong 67^\circ C$ .

**C.2)** •  $w'_u = h(A') - h(B') = 1775 - 1680 \cong 95 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

•  $q'_1 = h(B') - h(C') \cong 1680 - 640 = 1040 \text{ kJ.kg}^{-1} = q'_f > 0$  (le fluide reçoit de la chaleur de la part du local qui joue cette fois le rôle de source froide).

•  $q'_2 = h(D') - h(A') \cong 640 - 1775 = -1135 \text{ kJ.kg}^{-1} = q'_c < 0$  (le fluide cède de la chaleur à l'extérieur qui joue cette fois le rôle de source chaude).

C.3) Efficacité frigorifique :  $\eta' = \frac{\text{ce qui nous intéresse}}{\text{ce qui nous coûte}} = \frac{q'_f}{w'_u} = \frac{1040}{95} \approx 10,9 \approx 11$

C.4) Par un raisonnement similaire à celui exposé en B.4), on obtient :

$$\eta'_C = \frac{T_f}{T_c - T_f} = \frac{T_0}{T_2 - T_0} = \frac{293}{313 - 293} \approx 14,6$$

