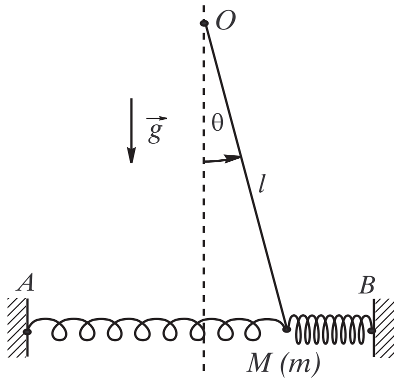
Devoir Surveillé n^{o}6

Consignes de rédaction :
- chaque réponse doit être précédée du raisonnement qui la justifie.
- les résultats devront être encadrés à la règle, les copies numérotées, portant votre nom et votre **code copie**.
- **La calculatrice est autorisée**.
- les applications numériques sans unités seront considérées fausses.

Oui le moment approche
Qui nous fera savoir avec vraie décision
Ce que nous disons avoir, ce que nous devons encore (...)
▷ Shakespeare, *Macbeth* [Ac. V, sc. IV (Siward)]

I Oscillateurs à deux ressorts

On considère un pendule constitué d'une tige de longueur l rigide de masse négligeable. Elle peut tourner librement sans frottement autour d'un axe (Δ) passant par son extrémité supérieure O. À l'extrémité inférieure M est fixée une masse m que l'on suppose ponctuelle. Par ailleurs, ce point M est relié à deux ressorts identiques (k, l_0) eux-mêmes accrochés à des points symétriques A et B de façon que lorsque l'ensemble est en équilibre la tige OM est verticale.
On écarte très légèrement le système de cette position d'équilibre.
On suppose que, pour les petits angles, les ressorts demeurent horizontaux.



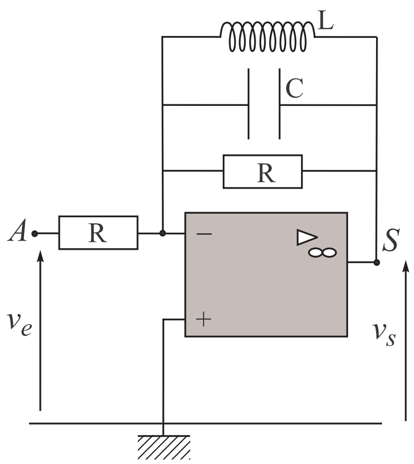
1) L'axe AB est l'axe des abscisses x et son origine est prise au milieu de $[AB]$. On pose $a = \dfrac{AB}{2}$.
Recopier le schéma, faire apparaître l'abscisse x de M et la base locale cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ en M.

2) Énoncer le théorème du moment cinétique évalué en O.

3) Établir l'équation du mouvement dans le cas des petites oscillations et donner leur période correspondante.

II Filtre actif

On rappelle que $\log(2) \simeq 0,3$. On considère le filtre représenté sur la figure ci-dessous.
La tension d'entrée est sinusoïdale de fréquence f et de pulsation ω.
L'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire.



1) Établir la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ de ce filtre.

2) Écrire cette fonction de transfert sous sa forme canonique, c'est-à-dire en fonction de la pulsation réduite $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$ (où ω_0 est la pulsation propre du filtre) et de Q, le facteur de qualité du filtre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{H}_0 \cdot \dfrac{jx}{Q}}{1 + \dfrac{jx}{Q} + (jx)^2}$$

En déduire (entre autre) les expressions littérales de la fréquence propre f_0 et de Q en fonction de R, L et C.
Faire les applications numériques pour $R = 2\ k\Omega$, $L = 0,1\ H$ et $C = 100\ nF$.

3) Quelle est la fréquence f_m pour laquelle le gain $H = |\underline{H}|$ est maximal ? Que vaut alors le gain en décibels G_{dB} ?

4) Déterminer les fréquences de coupure f_{c1} et f_{c2} de ce filtre (expressions littérales en fonction de f_0 et de Q, puis applications numériques).

5) Déterminer les équations littérales des asymptotes $G_{dB}(ABF)$ et $G_{dB}(AHF)$ à la courbe de réponse en gain.
Quel est le point d'intersection de ces asymptotes dans un diagramme semi-logarithmique avec « $\log f$ »$= \log\left(\dfrac{f}{1\ Hz}\right)$ en abscisse ?

6) Exprimer en fonction de x et de Q le déphasage φ de v_s par rapport à v_e pour $\varphi \in [-\pi, \pi]$.
Quelles sont les asymptotes $\varphi(ABF)$ et $\varphi(AHF)$ à la courbe de réponse en phase ?
Que vaut le déphasage φ (exprimé en degrés) pour $f_1 = 500\ Hz$? et pour $f_1 = 3\ kHz$?

7) Sur votre copie, tracer l'allure du diagramme de BODE en phase, avec «$\log x$» en abscisse.

8) On conserve la valeur numérique de l'inductance et on modifie la valeur de la capacité et celle de la résistance.

> **La courbe de réponse en gain en décibels** de ce nouveau filtre **est fournie en annexe**. ➜ Cette courbe (y apposer votre nom et prénom) est à rendre avec avec votre copie.

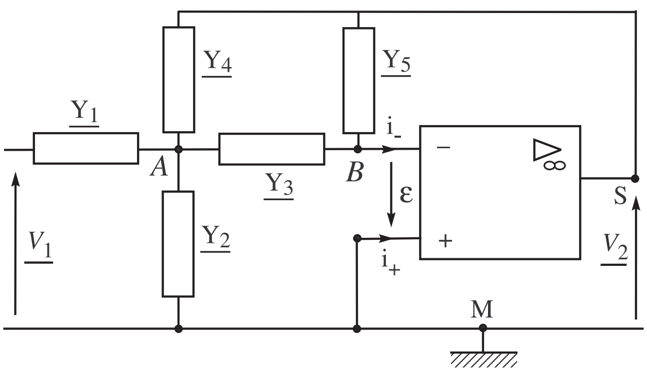
Déterminer graphiquement la valeur numérique de la nouvelle fréquence propre f'_0 du filtre (avec 2 chiffres significatifs).
En déduire la nouvelle valeur de la capacité C'.

9) Déterminer graphiquement les valeurs numérique des deux nouvelles fréquences de coupure.
En déduire la nouvelle valeur Q' du facteur de qualité.
En déduire la nouvelle valeur de la résistance R'.

10) *En vous aidant du seul tracé des asymptotes à basses et hautes fréquences* sur le diagramme de BODE en gain fourni, déterminer d'une manière différente à celle utilisée à la question **7)** la nouvelle valeur Q' du facteur de qualité.

III Traitement du signal [Banque PT 99]

Le signal issu d'un microphone (tension $\underline{V}_1$) est envoyé sur le circuit représenté ci-contre. Les composants notés $\underline{Y}_i$ avec $i = 1, 2, 3, 4, 5$ sont des admittances réalisées par des résistances ou des condensateurs. On rappelle que l'admittance d'un dipôle est l'inverse de son impédance.



1) Fonction de transfert générale :
Démontrer que la fonction de transfert peut être mise sous la forme :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{-\underline{Y}_1.\underline{Y}_3}{\underline{Y}_3.\underline{Y}_4 + \underline{Y}_5.\underline{S}}$$

Déterminer $\underline{S}$ en fonction des admittances $\underline{Y}_i$.

2)Étude du filtre passe-bas.
Les admittances $\underline{Y}_1$, $\underline{Y}_3$ et $\underline{Y}_4$ sont réalisées par des résistances toutes égales à R tandis que les admittances $\underline{Y}_2$ et $\underline{Y}_5$ sont réalisées par des condensateurs de capacités respectivement égales à C_2 et C_1.

2.a) Déterminer l'expression de la fonction de transfert $\underline{T}(j\omega) = \dfrac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1}$ en fonction de R, C_1 et C_2.

2.b) Mettre cette fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{A}{1 + j2m\dfrac{\omega}{\omega_0} + \left(j\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

et déterminer les expressions de A, ω_0 et m en fonction de R, C_1 et C_2.

2.c) Déterminer, à partir des équations précédentes, les expressions de C_1 et C_2 en fonction de R, m et ω_0.

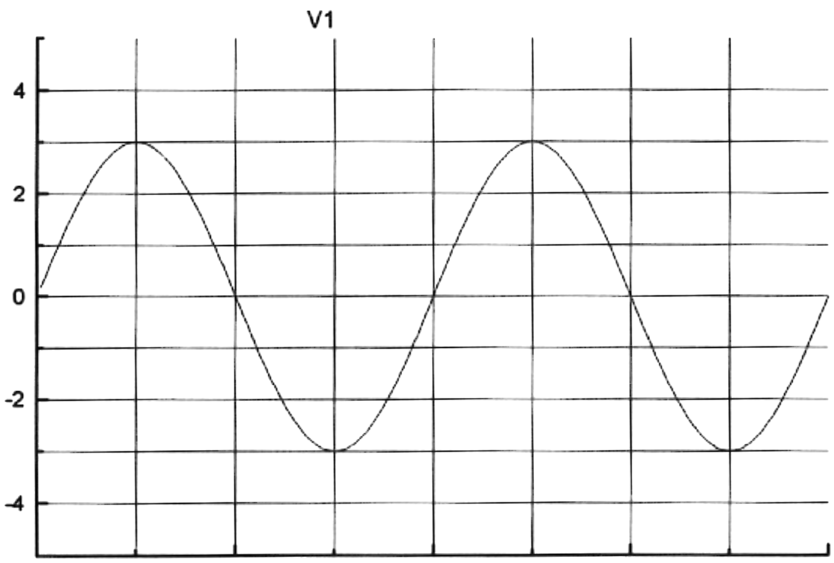
2.d) **Application numérique :** Calculer les valeurs numériques de C_1 et C_2 avec : $R = 1\ k\Omega$; $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $f_0 = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 20\ kHz$.

2.e) Définir et exprimer G_{dB} (réponse en gain en décibels) et φ (réponse en phase) de ce filtre, en fonction de ω et ω_0, en tenant compte du fait que : $m = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Étudier les variations de $G_{\text{dB}}(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$.
Tracer l'allure du diagramme de Bode de ce filtre.

3)Étude du filtre passe-bas.
On dispose d'un générateur basses fréquences (GBF) de fréquence maximale 2 MHz, d'un oscilloscope 2 voies et de tous les accessoires de mesure (sondes, ...).

3.a) Établir le câblage du filtre et des éléments précédents qui permet de tracer la fonction de transfert en amplitude et en phase du filtre passe-bas.

On souhaite relever le tracé de la fonction de transfert en amplitude et en phase du filtre passe-bas et, pour ce faire, on applique en entrée du filtre la tension sinusoïdale représentée figure ci-dessous.



gain vertical : 1V/div
base de temps : 12.5 µs/div

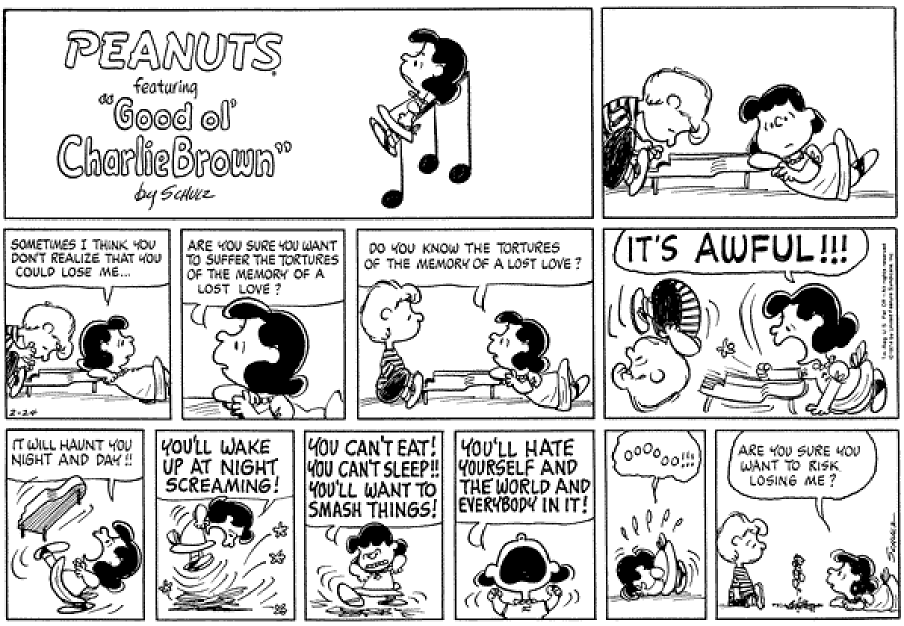
3.b) Déterminer numériquement, à partir de ce chronogramme, la fréquence commune du signal d'entrée et de sortie. Calculer l'amplitude de la tension de sortie $\underline{V}_2$ et le déphasage entre les deux signaux $\underline{V}_1$ et $\underline{V}_2$. Représenter à l'échelle la tension de sortie du filtre.

4) Filtrage du signal issu d'un microphone.

On suppose que le microphone traduit une note de « la » parfaitement pure (sans harmonique) en un signal électrique $V_L(t) = U_L.\cos(2\pi.f_L.t)$ de fréquence $f_L = 440\ Hz$ et d'amplitude $U_L = 10\ mV$.
Les défauts du microphone rajoutent un bruit électrique modélisable par une sinusoïde $V_B(t) = U_B.\cos(2\pi.f_B.t)$ de fréquence $f_B = 40\ kHz$ et d'amplitude $U_B = 2\ mV$.
Le signal à l'entrée du filtre est donc : $V_1(t) = V_L(t) + V_B(t)$.

4.a) Calculer le signal $V_2(t)$ qui sort du filtre.

4.b) Tracer l'allure du signal $V_1(t)$ qui rentre dans le filtre passe-bas et de $V_2(t)$, signal qui en sort. Commenter. En quoi ce filtre passe-bas est-il d'un intérêt supérieur au filtre passe-bas d'ordre 1 étudié en TP ?



IV Dosage conductimétrique d'une solution de dichromate de potassium

■ **Données :**

• Produit ionique de l'eau : $K_e = 10^{-14}$.
• Conductivités ioniques équivalentes molaires standard :
$\lambda°(H^+) = 350\ S.cm^2.mol^{-1}$; $\lambda°(OH^-) = 199\ S.cm^2.mol^{-1}$
$\lambda°(H^+)$ et $\lambda°(OH^-)$ sont toutes les deux très supérieures à la conductivité molaire équivalentes de tous les autres ions, ces dernières étant supposées identiques. On les notera $\lambda^{*°}$.

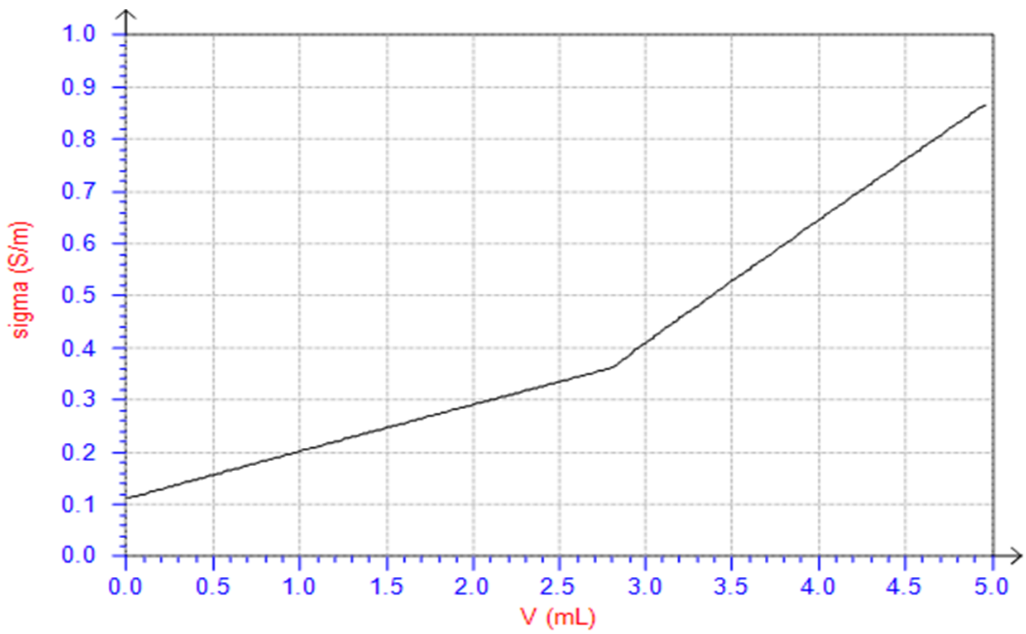
■ L'acidité des solutions de dichromate de potassium peut être interprétée grâce à l'équilibre :

$$Cr_2O_7^{2-} + H_2O \rightleftharpoons 2CrO_4^{2-} + 2H^+ \qquad K_1 = 10^{-14,4}$$

L'ion dichromate $Cr_2O_7^{2-}$ réagit avec les ions hydroxydes selon la réaction quantitative suivante :

$$Cr_2O_7^{2-} + 2HO^- \rightleftharpoons 2CrO_4^{2-} + H_2O \qquad K$$

On dose $V_1 = 100\ mL$ d'une solution de dichromate de potassium $(2K^+ + Cr_2O_7^{2-})$ de concentration C_1, **à déterminer**, par de la soude de concentration $C = 1,00\ mol.L^{-1}$.
Le dosage est suivi par conductimétrie. On note V le volume de soude ajouté et σ la conductivité de la solution.
La courbe σ en fonction de V est représentée ci-dessous :



1) Montrer que la constante de la réaction de dosage des ions $Cr_2O_7^{2-}$ par HO^- est $K = 10^{13,6}$.

2) Dans quel cas peut-on utiliser la conductimétrie pour suivre un dosage ?

3) Faire un schéma annoté du montage.

4) Quelle relation a-t-on à l'équivalence entre C, C_1, V_1 et le volume $V_{\text{éq}}$ de soude versé ?

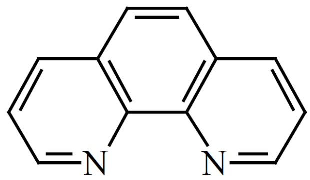
5) Établir l'expression de la conductivité σ en fonction du volume de soude versé V et de toutes les grandeurs utiles. On distinguera deux cas suivant que $V < V_{\text{éq}}$ ou $V > V_{\text{éq}}$.
Justifier l'allure de la courbe obtenue. Quelle est la valeur de $V_{\text{éq}}$?

6) Calculer la concentration C_1 de l'ion dichromate.

7) Pour $V = \dfrac{V_{\text{éq}}}{2}$ la solution à un pH $= 6,42$. Retrouver la valeur de K_1.

V Méthode de Job [Banque PT 02]

La (1,10)-phénantroline donne avec les ions Fe^{2+} un complexe très stable d'une couleur rouge très intense, qui est utilisé comme indicateur d'oxydo-réduction. L'équation de la réaction de formation du complexe en solution aqueuse peut s'écrire :



$$\mathsf{Fe}^{2+} + n\,\mathsf{phen} \rightleftharpoons \mathsf{Fe(phen)}_n^{2+} \qquad \beta_1 = 2,0.10^{20}$$

n est un entier, et le symbole « phen » représente la molécule de (1,10)-phénantroline, de formule semi-développée ci-contre.

On admet qu'il existe un seul complexe, c'est-à-dire une seule valeur du nombre entier n.
La méthode de Job utilisée, pour déterminer n, consiste à mesurer l'absorbance A, à différentes longueurs d'onde, de mélanges ayant tous la même concentration totale $C_0 = [\mathsf{Fe}^{2+}]_0 + [\mathsf{phen}]_0$.
Les notations C_0, $[\mathsf{Fe}^{2+}]_0$ et $[\mathsf{phen}]_0$ représentent les concentrations initiales, c'est-à-dire *avant toute réaction.*
On notera R le rapport $R = \dfrac{[\mathsf{phen}]_0}{C_0}$

1) On rappelle que lorsque plusieurs espèces absorbent à une longueur d'onde donnée λ, l'absorbance A s'exprime de façon additive, d'après la loi de Beer-Lambert, en fonction des coefficients d'extinction molaire ϵ_i et des concentrations C_i des espèces absorbantes :

$$A_{(\lambda)} = \sum_i \epsilon_i(\lambda).l.C_i \qquad l \text{ étant la longueur de la cuve}$$

On admet que seuls les ions Fe^{2+} et le complexe absorbent aux longueurs d'onde considérées.
En notant ϵ_1 et ϵ_2 les coefficients d'extinction molaires respectifs de Fe^{2+} et du complexe à la longueur d'onde λ (on suppose $\epsilon_2 > \epsilon_1$), exprimer l'absorbance A d'un des mélanges, en fonction des valeurs, à l'équilibre, des concentrations $[\mathsf{Fe}^{2+}]$ et $[\mathsf{Fe(phen)}_n^{2+}]$.

2) Exprimer $[\mathsf{Fe}^{2+}]_0$ et $[\mathsf{phen}]_0$ en fonction de R et de C_0.

3.a) Soit R_S la valeur de R lorsque les réactifs sont dans les proportions stoechiométriques. Exprimer R_S en fonction de n.

3.b) L'étude expérimentale est réalisée dans les deux cas suivants : $R < R_S$ et $R > R_S$. Dans chacun de ces cas, déterminer le réactif limitant.

4) On cherche à établir l'expression de $\Delta A = A - A_0$ en fonction de R, où A représente l'absorbance du mélange et A_0 l'absorbance qu'aurait le mélange s'il n'y avait pas réaction.
On distinguera deux cas : R inférieur à R_S et R supérieur à R_S.

4.a) Montrer que $\Delta A = C_0.l.(\epsilon_2 - \epsilon_1).\dfrac{R}{n}$ si $R < R_S$.

4.b) Montrer que $\Delta A = C_0.l.(\epsilon_2 - \epsilon_1)(1 - R)$ si $R > R_S$.

4.c) Quelle est l'expression de ΔA pour $R = R_S$?

5) Comment peut-on obtenir la valeur de n à partir de la courbe $\Delta A = f(R)$?

6) Les valeurs de ΔA ont été déterminées expérimentalement à 500 nm, pour une concentration $C_0 = 8,0.10^{-1}\ mol.L^{-1}$.

R	$0,1$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,5$	$0,6$	$0,7$	$0,8$	$0,9$
ΔA	$0,20$	$0,46$	$0,72$	$0,98$	$1,20$	$1,46$	$1,73$	$1,44$	$0,72$

6.a) Déterminer graphiquement, sur papier millimétré, la valeur de R_S.

6.b) En déduire la valeur de n.