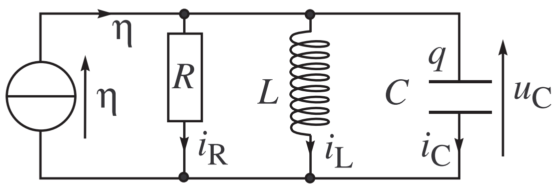
Correction DS n°3

I Circuit RLC parallèle

I.1) On dispose des relation suivantes :

$$\begin{cases} \eta = i_R + i_L + i_C & ① \\ u_C = u_R = u_L & \\ u_C = R.i_R & ② \\ u_C = L.\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} & ③ \\ u_C = \dfrac{q}{C} \longrightarrow i_C = C.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} & ④ \end{cases}$$



$$① \xrightarrow[④]{②} \eta = \frac{u_R}{R} + i_L + C.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \quad (\star)$$

• En dérivant $(\star)$ par rapport au temps :

$$\cancel{\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}} = \frac{1}{R}.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + C.\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} \longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}.u_C = 0}$$

• La forme canonique de cette équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants est :

$$\boxed{\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}.\dot{u}_C + \omega_0^2.u_C = 0}$$

I.2) Par identification : $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = RC\omega_0 = R.\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$

I.3) • Avec $R = 500\ \Omega$, $C = 0,2\ \mu F$ et $L = 200\ mH$: $\boxed{\omega_0 = 500\ rad.s^{-1}}$ et $\boxed{Q = 0,5}$

• Comme $Q = 0,5$, le régime est un **régime critique** : $\boxed{u_C = (A + B.t).\exp(-\omega_0.t)}$

Rq : On peut donc exprimer littéralement la dérivée temporelle de u_C :

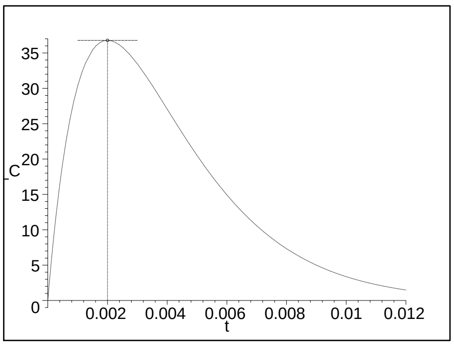
$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = (B - A.\omega_0 - w_0.B.t).\exp(-\omega_0.t)$$

I.4) • La continuité de l'intensité à travers L et celle de u_C aux bornes de C permet d'écrire $(\star)$ à l'instant $t = 0^+$:

$$\eta = \frac{u_C(0^+)}{R} + i_L(0^+) + C.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{\cancel{u_C(0^-)}}{R} + \cancel{i_L(0^-)} + C.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) = \frac{\eta}{C}}$$

• Donc, à $t = 0^+$: $\begin{cases} u_C(0^+) & = 0 & = A \\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) & \dfrac{\eta}{C} & = B - A\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} A = E \\ B = \dfrac{\eta}{C} \end{array}} \Rightarrow \boxed{u_C = \dfrac{\eta}{C}.t.\mathrm{e}^{-\omega_0.t}}$

Rq : La dérivée $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ s'annule pour : $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t_1} = (B - \cancel{A.\omega_0} - w_0.B.t_1).\exp(-\omega_0.t_1) = 0 \Leftrightarrow t_1 = \dfrac{1}{\omega_0}$



II Circuit RLC série [Agro Veto 09]

II.1) • En régime continu, la capacité se comporte comme un interrupteur ouvert et l'inductance comme un fil :

$$\boxed{i(\infty) = 0}$$

$$\boxed{u_L(\infty) = u_r(\infty) = u_R(\infty) = 0}$$

• La loi des mailles donne :

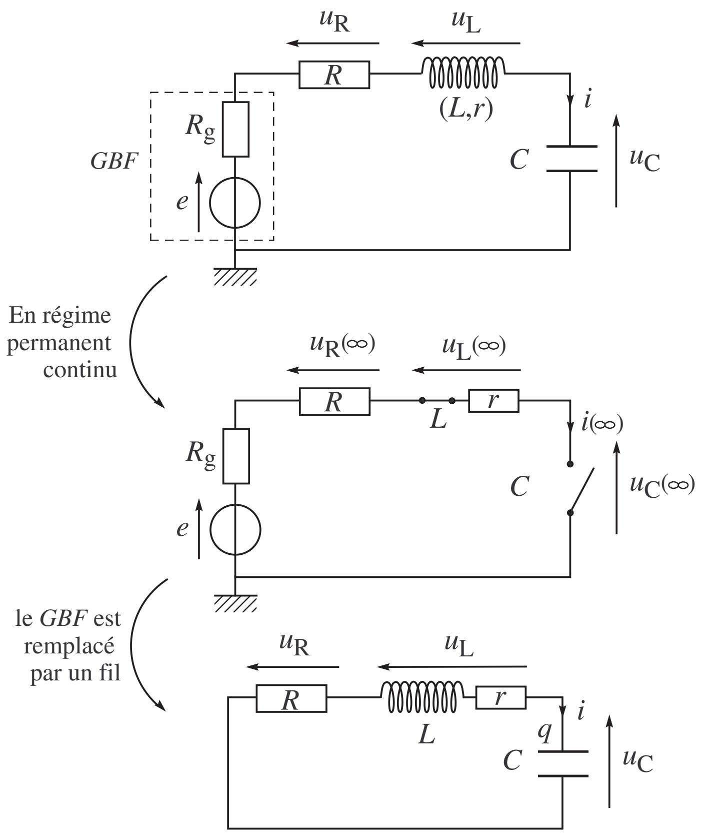
$$\boxed{u_C(\infty) = E}$$

II.2) • Loi des mailles : $u_L + u_R + u_C = 0$
Soit :

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = 0$$

avec $i = C.\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$
Donc :

$$\boxed{\ddot{u}_C + \frac{r+R}{L}.\dot{u}_C + \frac{1}{LC}u_C = 0}$$



De la forme canonique : $\boxed{\ddot{u}_C + \dfrac{\omega_0}{Q}.\dot{u}_C + \omega_0^2.u_C = 0}$

Par identification : $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\boxed{Q = \dfrac{L\omega_0}{R+r} = \dfrac{1}{(R+r).C\omega_0} = \dfrac{1}{R+r}.\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

II.3) Par continuité de la tension aux bornes du condensateur : $\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = E}$

Par continuité de l'intensité à travers la bobine : $\boxed{\left(\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)(0^+) = \dfrac{i(0^+)}{C} = \dfrac{i(0^-)}{C} = 0}$

II.4) Le régime est pseudosinusoïdal pour $Q > \dfrac{1}{2}$ soit :

$$\frac{1}{R+r}.\sqrt{\frac{L}{C}} > \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{R + r < 2.\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad \Leftrightarrow \quad R < R_{\mathsf{max}} \ \text{ avec : } \boxed{R_{\mathsf{max}} = 2.\sqrt{\frac{L}{C}} - r}$$

II.5) • **L'équation caractéristique** associée à l'équation différentielle est : $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}.r + \omega_0^2 = 0$

Son discriminant est : $\Delta = \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2.(1 - 4Q^2) < 0$ (puisque le régime est pseudo-périodique)

On peut l'écrire sous la forme : $\Delta = j^2.\left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2.(4Q^2 - 1)$

• Les **racines** de l'équation caractéristiques sont : $r_{1/2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j.\dfrac{\omega_0}{2Q}.\sqrt{4Q^2 - 1} = -\dfrac{1}{\tau} \pm j.\omega$

Soit : $\boxed{\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}}$ et $\boxed{\omega = \dfrac{\omega_0}{2Q}.\sqrt{4Q^2 - 1}}$ • Remarquons que : $\boxed{\tau.\omega = \sqrt{4Q^2 - 1}}$

• Puisque $u_C = (A.\cos(\omega.t) + B\sin(\omega.t)).\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

sa dérivée est : $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \left[\left(B\omega - \frac{A}{\tau}\right).\cos(\omega.t) - \left(A\omega + \frac{B}{\tau}\right).\sin(\omega.t)\right].\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

• Grâce à la question **3)** on obtient : $\begin{cases} u_c(0^+) & = A & = E \\ \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0^+) & = B\omega - \frac{A}{\tau} & = 0 \end{cases}$

On obtient : $\boxed{A = E}$ et $\boxed{B = \frac{A}{\tau.\omega} = \frac{E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}$

• Donc : $\boxed{u_C = E.\left[\cos(\omega.t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}.\sin(\omega.t)\right].\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$

II.6) • $\boxed{T = t_{(S_2)} - t_{(S_1)} = 1,29 - 0,65 = 0,64\ ms}$ et $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,64.10^{-3}} \simeq 9\,800\ rad.s^{-1}}$

• On peut écrire u_C sous la forme $u_C(t) = U_m.\cos(\omega.t + \varphi).\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$

Alors : $u_C(t+T) = U_m.\cos(\omega.(t+T) + \varphi).\exp\left(-\frac{t+T}{\tau}\right) = u_C(t).\exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$

et : $\delta = \ln\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \ln\left(\frac{u_C(t)}{u_C(t+T)}\right) = \ln\left(\frac{1}{\exp -\frac{T}{\tau}}\right) = \ln\left(\exp\left(\frac{T}{\tau}\right)\right) = \frac{T}{\tau}$

Donc : $\boxed{\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{\omega_0.T}{2Q}}$ $(\star)$ • On a donc : $\delta = \frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{\tau.\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}$

Soit : $\delta^2 = \frac{4\pi^2}{4Q^2-1}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}}}$

• **A.N. :** $Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{(1,28)^2} + \frac{1}{4}} \simeq \sqrt{6 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}}$ soit : $\boxed{Q = \frac{5}{2} = 2,5}$

et la relation $(\star)$ donne : $\omega_0 = \frac{2Q.\delta}{T} = \frac{2 \times \frac{5}{2} \times 1,28}{0,64.10^{-3}} = 5 \times 2.10^3$ soit : $\boxed{\omega_0 = 10^4\ rad.s^{-1}}$

II.7) $\boxed{\text{Lorsque } Q \gg 1 : T \simeq T_0}$

Rq : Dans le cas où $Q = 2,5$ l'erreur relative en assimilant $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$ à T_0 est :

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} - 1 = \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \simeq 1 + \frac{1}{8Q^2} - 1 = \frac{1}{8.\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{50} = 0,02 = 2\%$$

II.8) Puisque : $\begin{cases} Q & = \frac{1}{R+r}.\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L\omega_0}{R+r} = \frac{1}{(R+r).C\omega_0} \\ \omega_0 & = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$

On a : $\begin{cases} R + r = \frac{1}{Q.C\omega_0} = \frac{1}{\frac{5}{2} \times 0,1.10^{-6} \perp 10^4} = \frac{2}{5.10^{-3}} = 0,4.10^3\ \Omega \\ L = \frac{1}{\omega_0^2.C} = \frac{1}{(10^4)^2 \times 0,1.10^{-6}} = \frac{1}{10^8 \times 10^{-7}} \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} R + r = 400\ \Omega \\ L = 0,1\ H \end{array}}$