

Optique — Prisme

[Banque PT 2010 (A) — <http://www.banquept.fr>]

On considère un prisme d'angle $A = 60^\circ$ constitué d'un verre d'indice n . On appelle déviation (notée D) l'angle entre le rayon transmis par le prisme et le rayon incident.

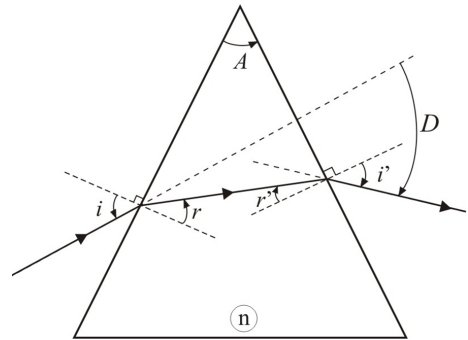


Figure 1 – Déviation d'un rayon lumineux par un prisme.

A.I - Étude de la déviation d'un rayon lumineux

A.I.1 Rappeler, en précisant bien ce que sont les différentes grandeurs sur un schéma, les lois de Snell-Descartes pour la réflexion et pour la réfraction.

A.I.2 On notera i et i' les angles d'incidence à l'entrée et à la sortie du prisme, ainsi que r et r' les angles des rayons réfractés à l'intérieur du prisme respectivement côté entrée et côté sortie.

La convention de signe est trigonométrique pour A , i , et r , et horaire pour i' , r' et D .

A.I.2.1 Quelles sont, pour un rayon incident situé dans le plan perpendiculaire à l'arête du prisme, les relations entre angles d'incidence et angles de réfraction ?

Montrer que $A = r + r'$.

A.I.2.2 Établir la relation : $D = i + i' - A$

Pour une valeur donnée de l'indice n , la déviation D est en fait seulement fonction de i . Lorsque i varie, la déviation D présente une valeur minimale, notée D_m dans la suite.

A.I.3 Montrer qu'au minimum de déviation les angles i et i' sont égaux.

A.I.4 Établir la relation $n \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)$. En déduire une méthode expérimentale pour mesurer l'indice d'un matériau.

En déduire une méthode expérimentale pour mesurer l'indice d'un matériau.

A.II - Influence de la longueur d'onde

Le prisme est fabriqué dans un matériau dont l'indice est donné en fonction de la longueur d'onde λ dans le vide (exprimée en nanomètre) dans le tableau suivant.

λ (nm)	404,6	435,8	486,1	508,6	546,1	578,0	643,8	706,5
N	1,590	1,581	1,572	1,568	1,564	1,561	1,556	1,552

Variations de l'indice du matériau en fonction de la longueur d'onde.

A.II.1 Loi de variation de l'indice avec la longueur d'onde

En utilisant les couples de valeurs (n, λ) du tableau 1, montrer que l'indice n du matériau peut se mettre sous la forme :

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

Calculer les valeurs de a et b pour λ exprimée en nanomètre.

A.II.2 Le minimum de déviation défini à la question **I.3**) est-il fonction de la longueur d'onde ?

Dans toute la suite (...), on suppose que l'on éclaire le prisme avec un angle d'incidence i égal à la valeur, notée i_0 , correspondant au minimum de déviation pour une valeur de la longueur d'onde dans le vide égale à $\lambda_0 = 578,0 \text{ nm}$.

A.II.3 Calculer numériquement cet angle i_0 .

A.II.4 Montrer que dans ces conditions, la dispersion angulaire $\frac{di'}{d\lambda}$ obéit à la relation :

$$\frac{di'}{d\lambda} = 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos i_0} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

Pour cela on pourra différentier les différentes relations obtenues aux questions **A.I.2.1**) et **A.I.2.2**), l'angle d'incidence étant constant et égal à i_0 .

A.II.5 Montage d'étude

Le prisme est placé dans le montage représenté Figure 2. Ce montage comprend :

- un collimateur composé d'un objectif convergent O_1 assimilable à une lentille mince convergente de distance focale image f' et d'une fente F perpendiculaire au plan de la figure, de largeur l , et centrée au foyer objet de O_1
- un objectif O_2 identique à O_1 , dans le plan focal image duquel on peut donc observer le spectre de la source qui éclaire la fente F .

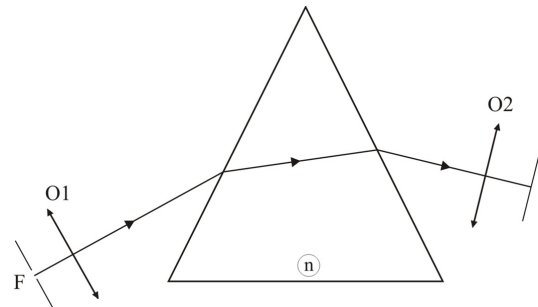


Figure 2 – Montage d'étude spectrale.

A.II.5.1 Expliquer le principe de fonctionnement du montage.

A.II.5.2 On éclaire la fente F par une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 578,0 \text{ nm}$; l'axe du collimateur fait avec la normale à la face d'entrée du prisme l'angle i_0 calculé à la question **A.II.3**).

Déterminer la position du centre de l'image de la fente F par l'ensemble du dispositif.

Sachant que $\frac{di'}{di} = -1$ lorsque le prisme est réglé au minimum de déviation, déterminer, en fonction de la largeur l de la fente source F , la largeur de cette image, toujours lorsque $\lambda = 578,0 \text{ nm}$.

Dans la suite, on considèrera, pour simplifier, que cette largeur ne dépend pas de la longueur d'onde.

A.II.5.3 La source éclairant la fente F contient maintenant deux longueurs d'onde voisines, $\lambda_1 = 577,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 579,0 \text{ nm}$.

Le prisme étant réglé au minimum de déviation pour la longueur d'onde $\lambda_0 = 578,0 \text{ nm}$, déterminer et calculer les positions des centres des images de F correspondant à ces deux lon-

gueurs d'onde ; on utilisera la relation $\frac{di'}{d\lambda} = 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos i_0} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$.

La fente F ayant une largeur de 1000 nm , comment doit-on choisir la focale image f' de O_1 et de O_2 pour que les deux images soient juste séparées ?

Application numérique : calculer la valeur limite de la focale f' .

A.II.5.4 La source éclairant la fente F est maintenant une source de lumière blanche.

Qu'observe-t-on sur l'écran ? On précisera bien la répartition des différentes longueurs d'ondes.

A.II.5.5 Ce montage permet la visualisation des spectres ; quel autre montage peut-on utiliser ?

Solution

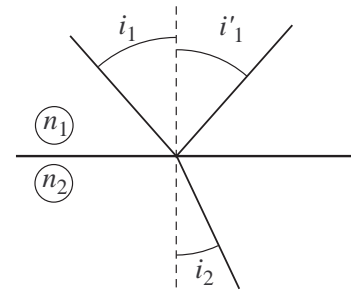
A.I - Étude de la déviation d'un rayon lumineux

A.I.1 Lois de Snell-Descartes :

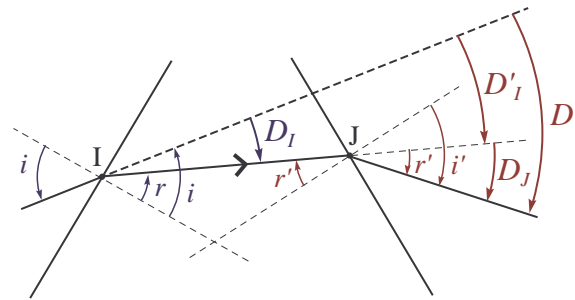
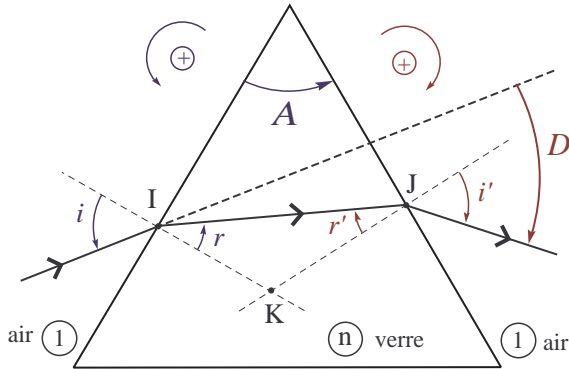
- Les rayons incident, réfléchi et réfracté sont dans un même plan, le plan d'incidence.

- Loi pour la réflexion : $i_1 = i'_1$

- Loi pour la réfraction : $n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$



A.I.2 Énoncé : « La convention de signe est trigonométrique pour A , i et r , et horaire pour i' , r' et D »



A.I.2.1 Rq : On note qu'avec les conventions choisies, tous les angles représentés sur le schéma de l'énoncé sont positifs.

• Loi pour la réfraction $\left\{ \begin{array}{l} \text{à la face d'entrée : } \sin i = n \cdot \sin r \quad \textcircled{1} \\ \text{à la face de sortie : } n \cdot \sin r' = \sin i' \quad \textcircled{2} \end{array} \right.$

• La somme des angles du triangle AIJ vaut π : $\pi = A + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right)$ soit : $A = r + r'$ $\textcircled{3}$

A.I.2.2 La déviation est la somme des déviations : $D = D'_I + D'_J$ avec $D'_I > 0$ et $D'_J = i' - r' > 0$ (orientation horaire des angles)

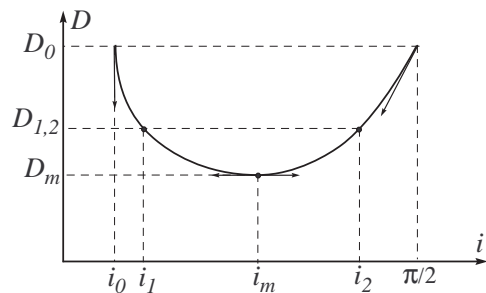
Puisque D'_I (convention horaire pour la face de sortie) est de signe opposé à D_I (convention trigonométrique de la face d'entrée) : $D'_I = -D_I = i - r > 0$

On en déduit, en utilisant $\textcircled{3}$: $D = i + i' - A$ $\textcircled{4}$

A.I.3 On note i' l'angle d'émergence associé à l'angle d'incidence i .

Si on prend comme angle d'incidence l'angle d'émergence initial i' , le nouvel angle d'émergence sera i par principe du retour inverse de la lumière.

Si la déviation passe par un minimum lorsque i varie (c'est-à-dire lorsqu'on fait tourner le prisme par rapport à la lumière incidente), on peut tracer l'allure de $D = i + i' - A$ en fonction de i (figure ci-contre).



Ainsi, sur ce tracé, $(i = i_1, i' = i_2)$ et $(i = i_2, i' = i_1)$ correspondent à la même déviation $D = D_{1,2}$.

Une parallèle à l'axe des i d'équation $D = D_{1,2}$ coupe donc la courbe $D = D(i)$ en deux points dont les abscisses représentent les deux incidences i_1 et i_2 pour lesquelles la déviation a la même valeur.

On en déduit que $i = i' = i_m$ lorsque la déviation est minimale puisqu'alors la parallèle à l'axe des i d'équation $D = D_m$ est tangente à la courbe ($i_1 = i_2 = i_m$).

A.I.4 Puisque $i = i' = i_m$ lorsque la déviation est minimale :

▲ Orientation ≠ de celle choisie en cours pour i' , r' et D !

les relations ① et ② donnent : $r = r' = r_m$

la relation ④ s'écrit : $i_m = \frac{D_m + A}{2}$

la relation ③ s'écrit : $r_m = \frac{A}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} r = r' = r_m \\ i_m = \frac{D_m + A}{2} \\ r_m = \frac{A}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{②}} n \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)$$

• **Méthode expérimentale pour mesurer n** : La mesure du minimum de déviation pour une couleur (λ) permet donc de déterminer l'indice du matériau pour cette dernière ($n(\lambda)$) avec la formule :

$$n(\lambda) = \frac{\sin\left(\frac{D_{m,\lambda} + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

A.II - Influence de la longueur d'onde

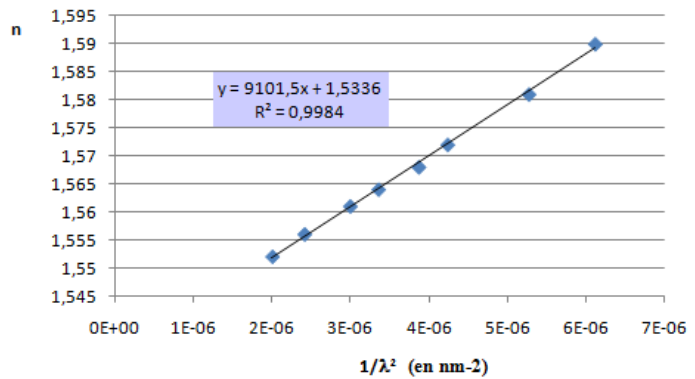
A.II.1 On effectue une régression linéaire avec les valeurs du tableau pour la fonction $n = f\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$

On obtient : $n \simeq 1,534 + \frac{9102}{\lambda^2}$ avec un coefficient $R^2 = 0,998$.

Comme $R^2 > 0,95$, l'indice suit bien une

loi du type $n = a + \frac{b}{\lambda^2}$

avec $a = 1,534$ et $b = 9102 \text{ nm}^2$



A.II.2 Le minimum de déviation D_m dépend de l'indice n , donc de la longueur d'onde λ .

Énoncé : « Dans toute la suite de cette partie **A** (...) on éclaire le prisme avec un angle d'incidence i_0 , correspondant au minimum de déviation pour une valeur de la longueur d'onde dans le vide égale à $\lambda_0 = 578,0 \text{ nm}$. »

A.II.3 D'après ce qui précède :

$$\left. \begin{array}{l} \text{A.II.1} \Rightarrow n(\lambda_0) = 1,534 + \frac{9102}{(578,0)^2} \Rightarrow n_0 = n(\lambda_0) = 1,561 \\ \text{④} \Rightarrow i_0 = i_m(\lambda_0) = \frac{D_m(\lambda_0) + A}{2} \\ \text{①/②} \Rightarrow \sin i_0 = n(\lambda_0) \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \Rightarrow \sin i_0 = 0,7804 \end{array} \right\} \Rightarrow i_0 = 51,3^\circ$$

A.II.4 On rassemble les quatre relations fondamentales pour le prisme qu'on différentie en gardant à l'esprit que $i = i_0 = \text{Cte}$ et que n dépend de λ ici considérée variable (on travaille avec une lumière incidente polychromatique), mais restant proche de λ_0 ($\lambda = \lambda_0 + d\lambda$) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{①} \sin i_0 = n \cdot \sin r \\ \text{②} n \cdot \sin r' = \sin i' \\ \text{③} A = r + r' \\ \text{④} D = i_0 + i' - A \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = \sin r \cdot dn + n \cdot \cos r \cdot dr \quad \text{⑤} \\ \sin r' \cdot dn + n \cdot \cos r' \cdot dr' = \cos i' \cdot di' \quad \text{⑥} \\ 0 = dr + dr' \quad \text{⑦} \\ dD = di' \quad \text{⑧} \end{array} \right.$$

On s'intéresse à la « dispersion angulaire $\frac{di'}{d\lambda}$ » c'est-à-dire à $\left(\frac{di'}{d\lambda}\right)_{\lambda_0} = \frac{di'}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$ évalué en λ_0 .

La relation ⑥ permet d'exprimer $\frac{di'}{dn} = \frac{\sin r'}{\cos i'} + n \cdot \frac{\cos r'}{\cos i'} \cdot \frac{dr'}{dn}$

La relation ⑤ permet d'exprimer $\frac{dr}{dn} = -\frac{\sin r}{n \cdot \cos r}$

soit, puisque $dr' = dr$ (cf. ⑦) : $\frac{dr'}{dn} = \frac{\sin r}{n \cdot \cos r}$

La nouvelle relation ⑥ devient : $\frac{di'}{dn} = \frac{\sin r'}{\cos i'} + n \cdot \frac{\cos r'}{\cos i'} \cdot \frac{\sin r}{n \cdot \cos r}$

En réduisant au même dénominateur et en tenant compte de ③ :

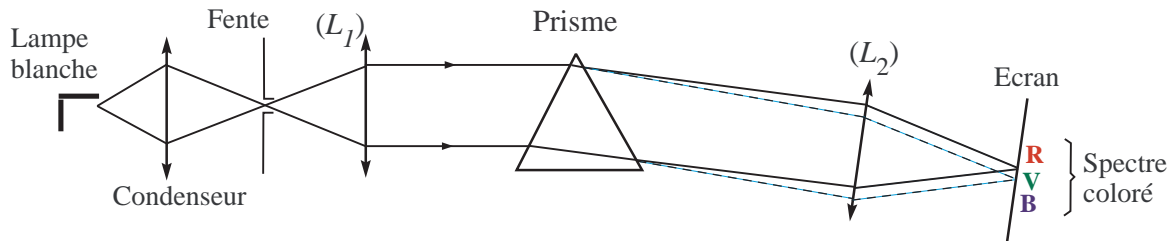
$$\frac{di'}{dn} = \frac{\sin r' \cdot \cos r + \cos r' \cdot \sin r}{\cos i' \cdot \cos r} = \frac{\sin(r + r')}{\cos i' \cdot \sqrt{1 - \sin^2 r}} = \frac{\sin A}{\cos i' \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_0}{n^2}}}$$

Le calcul est effectué autour de λ_0 ; donc : $n = n(\lambda_0) = n_0$ et $i' = i'(\lambda_0) = i'_{m0} = i_{m0} = i_0$

Comme enfin $\sin i_0 = n_0 \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right)$ (cf. **A.II.3**), on obtient :

$$\frac{di'}{dn} = \frac{\sin(A)}{\cos i_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_0}{n_0^2}}} = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos i_0 \cdot \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{A}{2}\right)}} \Rightarrow \frac{di'}{d\lambda} = \left(\frac{di'}{d\lambda}\right)_{\lambda_0} = 2 \cdot \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos i_0} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

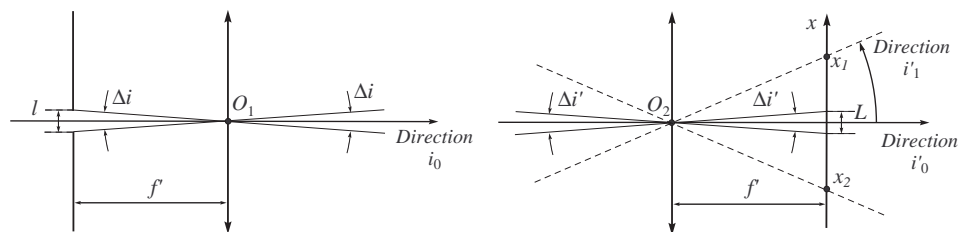
A.II.5 Montage d'étude



A.II.5.1 La lentille \mathcal{L}_1 permet d'éclairer le prisme par un faisceau de lumière. Le prisme dévie chaque longueur d'onde de manière différente. La lentille \mathcal{L}_2 focalise chaque couleur en un point différent de l'écran qui se trouve dans son plan focal.

A.II.5.2 Comme on travaille dans cette question en lumière monochromatique (λ_0) et que « l'axe du collimateur fait avec la normale à la face d'entrée du prisme l'angle i_0 », le dispositif est dans le cas du minimum de déviation pour la longueur d'onde λ_0 considérée. On en déduit donc que le centre de la figure, qui se trouve sur l'axe optique de la lentille \mathcal{L}_2 , fait un angle $i'_0 = i_0$ avec la normale à la face de sortie.

Puisque $di' = -di$
 $\Rightarrow \Delta i' = \Delta i$
 $\Rightarrow 2 \cdot \tan \frac{\Delta i}{2}$
 s'écrit de deux façons :



$\frac{l}{f'_1} = \frac{L}{f'_2}$ soit, puisque $f'_1 = f'_2 = f'$: $L = l$; la taille de l'image est identique à celle de la fente

A.II.5.3 • La longueur d'onde $\lambda_1 = 577,0 \text{ nm} = \lambda_0 + \Delta\lambda_1 \simeq \lambda_0 + d\lambda_1$ ne va pas être observée dans la direction i'_0 (intersection de l'écran et de l'axe optique de la lentille \mathcal{L}_2) mais sous l'angle $i'_1 = i'_0 + \Delta i'_1$ correspondant à l'abscisse $x_1 = f' \cdot \tan(\Delta i'_1)$

Tout revient à calculer $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\lambda_0}$ puisque $d\lambda_1 = -1 \text{ nm}$ est connue et que :

$$di'_1 = \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos i_0} \cdot \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\lambda_0} \cdot d\lambda_1$$

Or, on a établi que $n = a + \frac{b}{\lambda^2}$ donc : $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)_{\lambda_0} = -2 \cdot \frac{b}{\lambda_0^3} = -94,27 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} = -94,27 \cdot 10^{-6} \text{ nm}^{-1}$

$$\text{D'où : } \Delta i'_1 \simeq di'_1 = 2 \times \frac{\sin(30^\circ)}{\cos(51,3^\circ)} \times (-94,27 \cdot 10^3) \times (-10^{-9}) = 150,8 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

Ce qui correspond à une position $x_1 \simeq f' \cdot di'_1$

• La position pour la longueur d'onde $\lambda_2 = 579,0 \text{ nm} = \lambda_0 + d\lambda_2$ (avec $d\lambda_2 = -d\lambda_1 = +1 \text{ nm}$) est symétrique par rapport à l'axe optique : $x_2 \simeq -f' \cdot di'_1$

Pour que les deux images soient séparées, il faut que la distance entre les centres des deux fentes images soit supérieure à deux fois la demi-largeur de la fente, soit

$$x_1 - x_2 > l \Leftrightarrow 2 \cdot f' \cdot di'_1 > l \Leftrightarrow f' > \frac{1000 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{2 \times 150,8 \cdot 10^{-6}} \Leftrightarrow f' > 3,32 \text{ mm}$$

A.II.5.4 Si $\lambda \nearrow$, la relation simplifiée de Cauchy conduit à n qui \searrow . Alors :

① $\rightarrow r \nearrow$	Puisque $\lambda_{\text{Rouge}} > \lambda_{\text{Bleu}}$
③ $\rightarrow r' \searrow$	On en déduit que le rouge est le moins dévié,
② $\rightarrow i' \searrow$	donc sera vers le haut de l'écran (orienté vers l'arête du prisme),
④ $\rightarrow D \searrow$	alors que le violet (et le bleu) sera plus dévié en direction de la base du prisme.

A.II.5.5 Un goniomètre est un autre montage qui permet d'observer les spectres.