

► Correction DS n°7

I Étude du système liquide-vapeur [CCP MP 07]

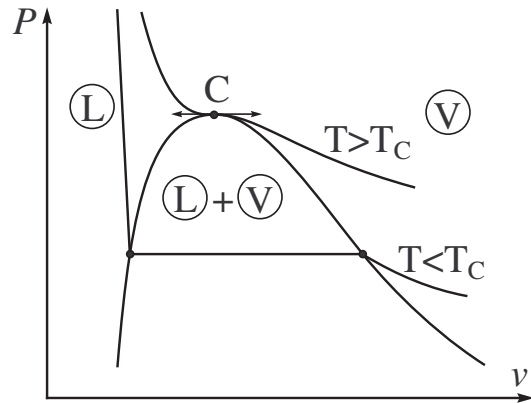
1) Voir ci-contre.

2) Voir ci-contre. L'isotherme critique admet une tangente horizontale au point critique :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T=T_C, V=V_C} = 0$$

et il y a un point d'inflexion au point C :

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_{T=T_C, V=V_C} = 0$$



3) Voir ci-contre. Le palier sur cette isotherme correspond au fait que le corps pur étant diphasé, donc monovariant, la température du changement d'état impose la pression de vapeur saturante.

4) Pour un point E du palier de l'isotherme, le volume tant une grandeur additive :

$$\left. \begin{aligned} V &= V_{\text{L}} + V_{\text{V}} = m_l \cdot v_l + m_g \cdot v_g \\ &= m \cdot [(1-x) \cdot v_l + x \cdot v_g] = m \cdot [v_l + x \cdot (v_g - v_l)] \\ &= m \cdot v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{x = \frac{v - v_l}{v_g - v_l}} \quad \text{De même : } \boxed{x = \frac{h - h_l}{h_g - h_l}}$$

5) Par définition : $l_{\text{vap}}(T) = h_g(T) - h_l(T)$

θ ($^{\circ}\text{C}$)	35	50	100	185	285
l_{vap} ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)	2414,33	2378,46	2253,02	1993,86	1507,72

6) On peut calculer le volume massique du système et en déduire le titre massique en vapeur à partir des données du tableau à $\theta = 100^{\circ}\text{C}$:

$$\boxed{v = \frac{V}{m} = \frac{10 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-3}} = 1,000 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{v - v_l}{v_g - v_l} = \frac{1,000 - 1,04 \cdot 10^{-3}}{1,673 - 1,04 \cdot 10^{-3}} = 0,597 = 59,7\%}$$

7) Puisque le système subit une détente adiabatique réversible de la température $T = \theta + 273$ à la température $T' = \theta' + 273$, il subit une isentropique, donc :

$$s(x', T') = s(x, T) \Rightarrow c_l \cdot \ln(T') + \frac{x' \cdot l_{\text{vap}}(T')}{T'} + \text{Cste} = c_l \cdot \ln(T) + \frac{x \cdot l_{\text{vap}}(T)}{T} + \text{Cste}$$

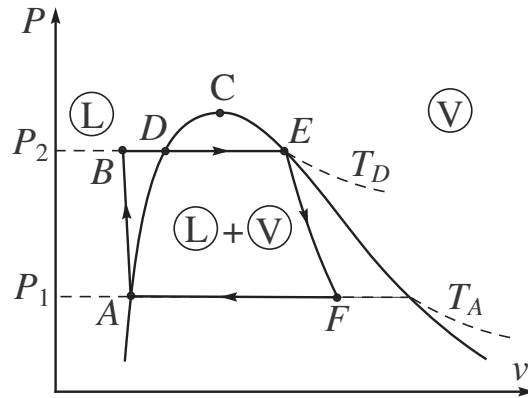
$$\text{On en déduit : } \boxed{x' = \frac{T'}{l_{\text{vap}}(T')} \cdot \left[c_l \cdot \ln\left(\frac{T}{T'}\right) + \frac{x \cdot l_{\text{vap}}(T)}{T} \right] = 0,572 = 57,2\%}$$

8) Pour la même isentropique, en supposant que le titre massique en vapeur ne varie pas :

$$s(x'', T') = s(x'', T) \Rightarrow c_l \cdot \ln(T') + \frac{x'' \cdot l_{\text{vap}}(T')}{T'} + \text{Cste} = c_l \cdot \ln(T) + \frac{x'' \cdot l_{\text{vap}}(T)}{T} + \text{Cste}$$

$$\text{On en déduit : } \boxed{x'' = \frac{c_l \cdot \ln\left(\frac{T}{T'}\right)}{\frac{l_{\text{vap}}(T')}{T'} - \frac{l_{\text{vap}}(T)}{T}} = \frac{TT' c_l \cdot \ln\left(\frac{T}{T'}\right)}{T \cdot l_{\text{vap}}(T') - T' \cdot l_{\text{vap}}(T)} = 0,455 = 45,5\%}$$

- 9) • $\theta_A = 35^\circ C$ ou $T_A = 308 K$
 (température du palier de changement d'état à la pression de vapeur saturante $P_s = P_1 = 0,056 \text{ bar}$)
 • $\theta_D = 285^\circ C$ ou $T_D = 558 K$
 (température du palier de changement d'état à la pression de vapeur saturante $P_s = P_2 = 69,200 \text{ bar}$)
 • $\theta_F = \theta_A$ puisque F et A appartiennent au même palier de changement d'état.



10) Voir ci-contre.

11) Puisque la transformation $A \rightarrow B$ est une isentropique (adiabatique réversible) d'une phase liquide entre la température T_A et la la température $T_B = T_A + \Delta T$:

$$s(A) = s(B) \Leftrightarrow s(T_A, P_1) = s(T_B, P_2) \Rightarrow c_l \cdot \ln(T_A) - \alpha v_l \cdot P_1 = c_l \cdot \ln(T_A + \Delta T) - \alpha v_l \cdot P_2$$

$$c_l \cdot \ln\left(\frac{T_A + \Delta T}{T_A}\right) = \alpha v_l \cdot (P_2 - P_1) \quad (*) \Rightarrow \Delta T = T_A \cdot \left[\exp\left(\frac{\alpha v_l}{c_l} (P_2 - P_1)\right) - 1 \right] = 76 \text{ mK}$$

Rque : Puisque $\Delta T \ll T_A$, on pouvait procéder à un développement limité à l'ordre 1 pour la variable $\frac{\Delta T}{T_A}$:

$$(*) \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_A}\right) = \frac{\alpha v_l}{c_l} \cdot (P_2 - P_1) \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_A} \simeq \frac{\alpha v_l}{c_l} \cdot (P_2 - P_1)$$

$$\text{Soit : } \Delta T \simeq T_A \cdot \frac{\alpha v_l}{c_l} \cdot (P_2 - P_1) \simeq 76 \text{ mK}$$

CI : $T_B \simeq T_A$

12) • On peut utiliser l'expression de l'entropie donnée en **B**) et le fait que la transformation $E \rightarrow F$ est isentropique. On peut aussi effectuer une démonstration complète.

Puisqu'on a un cycle : $\Delta s = 0 \Rightarrow \Delta s_{AB} + \Delta s_{BD} + \Delta s_{DE} + \Delta s_{EF} + \Delta s_{FA} = 0$

$$\text{Soit : } 0 + c_l \cdot \ln\left(\frac{T_D}{T_B}\right) + \frac{l_{\text{vap}}(T_D)}{T_D} + 0 - x_F \cdot \frac{l_{\text{vap}}(T_A)}{T_A} = 0$$

$$x_F = \frac{T_A}{l_{\text{vap}}(T_A)} \cdot \left[c_l \cdot \ln\left(\frac{T_D}{T_A}\right) + \frac{l_{\text{vap}}(T_D)}{T_D} \right] = \frac{308}{2414,33} \cdot \left[4,18 \cdot \ln\left(\frac{558}{308}\right) + \frac{1507,72}{558} \right] = 0,662 = 66,2\%$$

• Puisque $\theta_F = \theta_A$, on a : $h_F = (1 - x_F) \cdot h_l(\theta_A) + x_F \cdot h_g(\theta_A) = 1743,63 = 1744 \text{ kJ.kg}^{-1}$

13) • Le transfert thermique reçu par la masse m de fluide à travers le condenseur est :

$$Q_1 = Q_{FA} = Q_{FA,P} = \Delta H_{FA} = m \cdot (h_A - h_F) = m \cdot (h_l(\theta_A) - h_F) = -1597 \text{ kJ}$$

• Le transfert thermique reçu par la masse m de fluide à travers le générateur de vapeur est :

$$Q_2 = Q_{BD} + Q_{DE} = Q_{BD,P} + Q_{DE,P} = \Delta H_{BD,\varphi} + \Delta H_{DE,\text{vap}}$$

$$\text{Soit : } Q_2 = m \cdot c_l \cdot (T_D - T_B) + m \cdot l_{\text{vap}}(\theta_D) = 2553 \text{ kJ}$$

14) Le premier principe appliqué sur le cycle permet d'écrire :

$$W = -Q = -Q_{AB} - Q_{BD} - Q_{DE} - Q_{EF} - Q_{FA} \Rightarrow W = -Q_1 - Q_2 = -955 \text{ kJ}$$

15) $\rho = -\frac{W}{Q_2} = 37,4\%$ et $\rho_C = 44,8\%$. On vérifie que $\rho_C > \rho$.

II Machines thermiques [G2E 2013]

1) Machine	Principe	W	Q_C	Q_F
M	conversion de chaleur en travail	< 0	> 0	< 0
RF	refroidissement de la source froide	> 0	< 0	> 0
PAC	refroidissement de la source froide			

2) $\eta = -\frac{W}{Q_C}$ $e_{RF} = \frac{Q_F}{W}$ $e_{PAC} = -\frac{Q_C}{W}$

3) Premier principe et deuxième principe sur un cycle réversible ditherme :

$$W + Q_C + Q_F = 0 \quad (1P) \quad \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = 0 \quad (2P)$$

4) $\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C}$ $e_{RF} = \frac{T_F}{T_C - T_F}$ $e_{PAC} = \frac{T_C}{T_C - T_F}$

5) D'après l'énoncé du Deuxième principe : $\sigma = \int S > 0$

6) Le deuxième principe devient : $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + \sigma = 0 \Leftrightarrow \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} = -\sigma < 0$

7) • On en déduit : $\eta = -\frac{W}{Q_C} \stackrel{1P}{=} 1 + \frac{Q_F}{Q_C} \stackrel{2P}{=} 1 - \frac{\sigma T_F}{Q_C} - \frac{T_F}{T_C} \Rightarrow \eta = \eta_C - \sigma \cdot \frac{T_F}{Q_C} \quad (*)$

Puisque σ , Q_C et T_C sont des grandeurs positives, l redement η est évidemment inférieur au rendement de Carnot : $\eta < \eta_C$

8) • Les données de l'énoncé permettent de calculer directement :

$$\eta_C = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 0,80(0) \quad \text{et} \quad \eta = r \cdot \eta_C = 0,75(2)$$

• On en déduit : $Q_C = -\frac{W}{\eta} = 19,9 \text{ kJ/cycle}$ et $Q_F = -W - Q_C = -4,9 \text{ kJ/cycle}$

• La relation (*) s'écrit : $\sigma \cdot \frac{T_F}{Q_C} = \eta_C - \eta = \eta_C \cdot (1 - r) = \left(1 - \frac{T_F}{T_C}\right) (1 - r) = \frac{T_C - T_F}{T_C} \cdot (1 - r)$

Soit : $\sigma = \frac{Q_C \cdot (T_C - T_F) (1 - r)}{T_F \cdot T_C} = 3,3 \text{ J.K}^{-1}/\text{cycle}$

9) On a : $\Phi = \frac{Q_C}{\Delta t} = \frac{m_B \cdot q_B}{\Delta t} \Rightarrow m_B = \frac{\Phi \cdot \Delta t}{q_B} = 2,4 \text{ kg/h}$

10) Pour une PAC réversible : $e_1 = \frac{T_H}{T_H - T_E} = 14,7$

11) Par définition de l'efficacité thermique : $e_1 = \frac{Q_C}{W} = \frac{\Phi}{\mathcal{P}_e} \Rightarrow \mathcal{P}_e = \frac{\Phi}{e_1} = 819 \text{ W}$

12) D'après ce que nous avons vu précédemment pour un moteur ou une PAC :

$$Q_C = Q > 0 \quad Q'_C < 0 \quad Q_F < 0 \quad Q'_F > 0 \quad W > 0$$

13) ① Par définition : $Q_H = -Q_F - Q'_C$ ② Le (2P) appliqué à (M) donne : $Q_F = -\frac{T_H}{T} \cdot Q$

③ Pour un PAC réversible : $e_{PAC} = -\frac{Q'_C}{W} = \frac{T_H}{T_H - T_E}$ soit : $Q'_C = -\frac{T_H}{T_H - T_E} \cdot W$

④ Rendement du moteur réversible : $\eta_C = \frac{W}{Q_C} = 1 - \frac{T_H}{T} \Rightarrow W = Q \cdot \left(1 - \frac{T_H}{T}\right) = \frac{T - T_H}{T} \cdot Q$

⑤ La relation ③ devient : $Q'_C = -\frac{T_H}{T_H - T_E} \cdot \frac{T - T_H}{T} \cdot Q$

• On en déduit : ① $\xrightarrow[⑤]{②}$ $Q_H = \left(\frac{T_H}{T} + \frac{T_H}{T} \cdot \frac{T - T_H}{T_H - T_E} \right) \cdot Q \Rightarrow Q_H = \frac{T_H}{T} \cdot \frac{T - T_E}{T_H - T_E} \cdot Q$

Ou encore : $Q_H = \frac{\frac{1}{T_E} - \frac{1}{T}}{\frac{1}{T_E} - \frac{1}{T_H}} \cdot Q$

14) Puisque $Q_H = \Phi \cdot \Delta t$ et $Q_C = Q = m_B \cdot q_B$, on en déduit :

$$m'_B = \frac{\Phi \cdot \Delta t}{q_B} \cdot \frac{T}{T_H} \cdot \frac{T_H - T_E}{T - T_E} = \frac{\Phi \cdot \Delta t}{q_B} \cdot \frac{\frac{1}{T_E} - \frac{1}{T}}{\frac{1}{T_E} - \frac{1}{T_H}} = 0,31 \text{ kg/h}$$

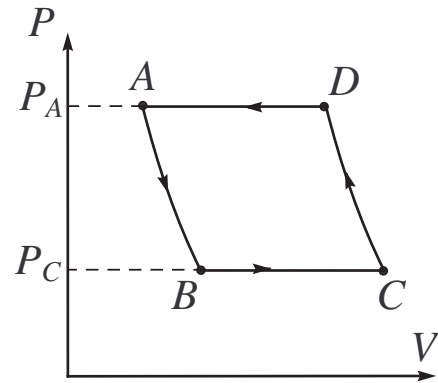
CI : $\frac{m_B}{m'_B} \simeq 7,7$: grâce à la PAC (qui permet de maintenir la température de l'habitation en transférant de l'énergie de l'extérieur vers l'habitation en sens contraire des pertes thermiques), la consommation de bois a été divisée par un facteur 8 par rapport à un chauffage direct

15) Voir ci-contre.

16) On peut utiliser les relations de Laplace pour les transformations adiabatiques réversibles du gaz parfait avec γ constant : $P_A^{1-\gamma} T_A^\gamma = P_B^{1-\gamma} T_B^\gamma = P_C^{1-\gamma} T_C^\gamma$

Donc : $T_B = T_A \cdot \left(\frac{P_A}{P_C} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 152 \text{ K}$

De même : $T_D = T_C \cdot \left(\frac{P_C}{P_A} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 527 \text{ K}$



17) On a toujours : $e_2 = e_{PAC} = -\frac{Q'_C}{W} = \frac{Q'_C}{Q'_C + Q'_F} = \frac{\Delta H_{DA}}{\Delta H_{DA} + \Delta H_{BC}}$

$e_2 = \frac{T_A - T_D}{T_A - T_D + T_C - T_B} = 2,07$ Division pr 7 de l'efficacité en raison de transferts thermiques non isothermes : le cycle décrit ici est mécaniquement réversible mais ne l'est pas thermiquement.

III Moteur de Diesel [d'après ICNA 06 & 10]

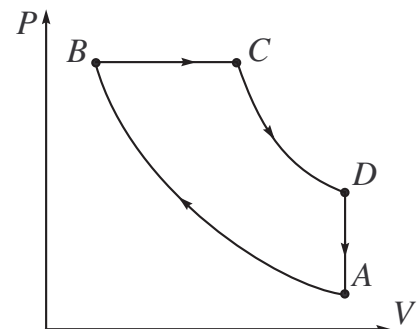
1)

2) La loi des gaz parfaits appliquée à la masse m de gaz dans l'état $\{A\}$ s'écrit : $P_A V_A = m r T_A$.

Soit : $m = \frac{P_A V_A}{r T_A} = 2,90 \text{ g}$

3) La transformation $A \rightarrow B$ est adiabatique réversible pour un gaz parfait. On peut appliquer la loi de Laplace : $P_A^{1-\gamma} \cdot T_A^\gamma = P_B^{1-\gamma} \cdot T_B^\gamma$

On en déduit : $P_B = \left(\frac{T_A}{T_B} \right)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} P_A = 71,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$



$$\text{Soit : } V_B = \frac{mrT_B}{P_B} = 0,12 \text{ L}$$

$$4) \text{ Rendement : } \rho = \left| \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur coûteuse}} \right| = \frac{-W}{Q_C} = 1 + \frac{Q_F}{Q_C} = 1 + \frac{Q_{DA,V}}{Q_{BC,P}} = 1 + \frac{C_V \cdot (T_A - T_D)}{C_P \cdot (T_C - T_B)}$$

$$\text{Soit : } \rho = 1 + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = 1 + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{T_A \cdot \left(1 - \frac{T_D}{T_A}\right)}{T_B \cdot \left(\frac{T_C}{T_B} - 1\right)}$$

- Comme $B \rightarrow C$ est une isobare : $\frac{T_C}{T_B} = \frac{P_C \cdot V_C}{P_B \cdot V_B} \cdot \frac{nR}{nR} = \frac{V_C}{V_B} = \frac{V_C}{V_A} \cdot \frac{V_A}{V_B} = \frac{\alpha}{\beta}$ ①

- Comme $D \rightarrow A$ est une isochore : $\frac{T_D}{T_A} = \frac{P_D \cdot V_D}{P_A \cdot V_A} \cdot \frac{nR}{nR} = \frac{P_D}{P_A}$ ②

- Comme $C \rightarrow D$ et $A \rightarrow B$ sont régies par la loi de Laplace :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \quad \frac{T_A}{T_B} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} \quad \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \alpha^{\gamma-1} \quad ③ \\ P_C V_C^\gamma = P_D V_D^\gamma \quad P_D = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^\gamma P_C = \left(\frac{V_C}{V_A}\right)^\gamma P_C \quad \Rightarrow P_D = P_C \cdot \beta^{-\gamma} \quad ④ \\ P_A V_A^\gamma = P_B V_B^\gamma \quad P_A = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\gamma P_B \quad \Rightarrow P_A = P_B \cdot \alpha^{-\gamma} \quad ⑤ \end{array} \right.$$

- On en déduit : $\frac{①, ②}{\text{et } ③} \quad \rho = 1 + \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\alpha^{1-\gamma} \cdot \left(1 - \frac{P_D}{P_A}\right)}{\alpha \cdot \beta^{-1} - 1} \quad \frac{④}{⑤} \quad \rho = 1 + \frac{\alpha^{-\gamma} \cdot (1 - \alpha^\gamma \cdot \beta^{-\gamma})}{\beta^{-1} - \alpha^{-1}}$

$$\text{Soit : } \rho = 1 - \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{\alpha^{-\gamma} - \beta^{-\gamma}}{\alpha^{-1} - \beta^{-1}}$$

$$5) \text{ On a : } \Delta S_{DA} = S_A - S_D = C_V \cdot \ln\left(\frac{T_A}{T_D}\right) + nR \cdot \ln\left(\frac{V_A}{V_D}\right) = \frac{nR}{\gamma-1} \cdot \ln\left(\frac{T_A}{T_D}\right)$$

$$\text{Soit : } \Delta S_{DA} = \frac{mr}{\gamma-1} \cdot \ln\left(\frac{T_A}{T_D}\right) = -4,36 \text{ J.K}^{-1}$$

6) Le transfert thermique Q_{DA} est effectué avec une source de température constante T_A :

$$\dot{e}S_{DA} = \int_D^A \delta \dot{e}S = \int_D^A \frac{\delta Q}{T_A} = \frac{Q_{DA}}{T_A}$$

Pour exprimer Q_{DA} , on applique le premier principe : $Q_{DA} = Q_{DA,V} \stackrel{\text{isoch}}{=} \Delta U_{DA} \stackrel{1^e}{=} C_V \cdot (T_A - T_D)$

$$\text{Soit : } \dot{e}S_{DA} = \frac{mr}{\gamma-1} \cdot \frac{T_A - T_D}{T_A} = -14,83 \text{ J.K}^{-1}$$

7) Le deuxième principe s'écrit :

$$\Delta S_{DA} = \dot{e}S_{DA} + \dot{p}S_{DA} \quad \Rightarrow \quad \dot{p}S_{DA} = \frac{mr}{\gamma-1} \cdot \left(\ln\left(\frac{T_D}{T_A}\right) - 1 + \frac{T_D}{T_A} \right) = 10,47 \text{ J.K}^{-1} > 0$$

Donc il y a création d'entropie sur la transformation $D \rightarrow A$ et **le cycle est irréversible.**