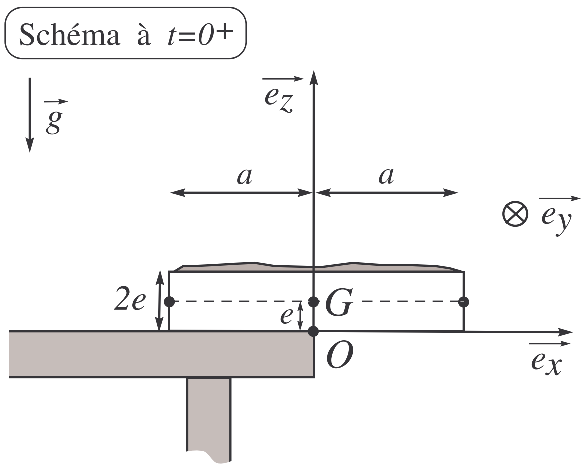
➤ DS n°6

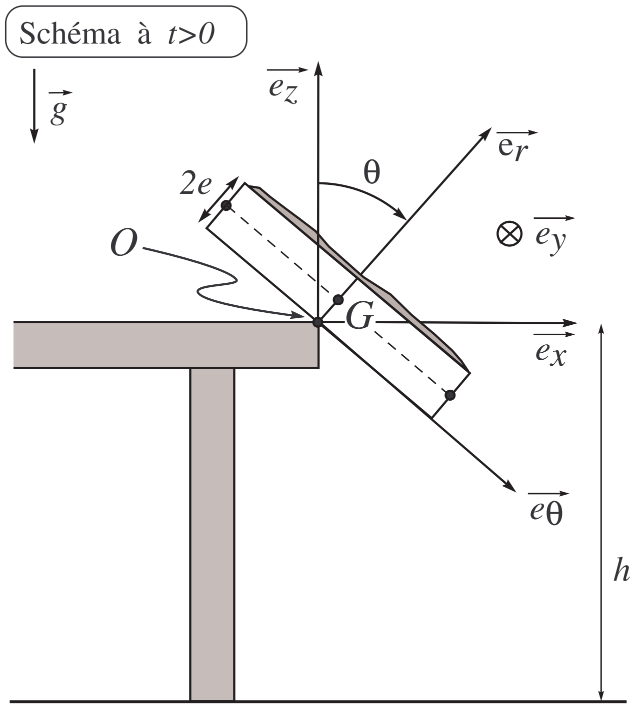
Samedi 22 mars 2014

I Chute d'une tartine beurrée

Existe-t-il une raison pour laquelle les tartines beurrées tomberaient plus souvent du côté beurré ? Le but de cet exercice est d'apporter une réponse.

On imagine une tartine homogène (longueur $2a$, largeur $2b$, épaisseur $2e$ et masse m) posée sur une table.
Sans faire attention, une personne la pousse vers un bord très lentement. Quand le milieu de la tartine atteint le bord O, la tartine amorce une rotation autour de l'arête Oy.
L'action de la table sur la tartine est modélisée par une force $\overrightarrow{R} = T\overrightarrow{e_\theta} + N\overrightarrow{e_r}$, appliquée en O.
On note θ l'angle entre la tartine et l'horizontale (voir la figure ci-contre, la tartine est agrandie pour des raisons de lisibilité).





Données :

- intensité du champ de pesanteur :
  $g = 9,81\ m.s^{-2}$
- moment d'inertie de la tartine selon Oy :

$$J_{Oy} = \frac{1}{3}m(a^2 + 4e^2)$$

- Théorème de la résultante dynamique (ou Théorème du centre d'inertie) pour un système de masse m et de centre d'inertie G :

$$m\overrightarrow{a_G} = \sum \overrightarrow{F_{\text{ext}}}$$

1) À l'aide du théorème scalaire du moment cinétique pour la tartine tournant autour de l'axe fixe l'axe (Oy), établir l'équation donnant $\ddot{\theta}$ en fonction de θ sous la forme :

$$\ddot{\theta} = \frac{3ge}{a^2 + 4e^2}\sin(\theta) \quad (\star)$$

2) En déduire $\dot{\theta}$ en fonction de θ sous la forme :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{6ge}{a^2 + 4e^2}(1 - \cos(\theta)) \quad (\star\star)$$

3) Retrouver l'expression $(\star\star)$ à l'aide d'une approche énergétique.

4) Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OG}$ en fonction de e et de $\overrightarrow{e_r}$.
En déduire l'expression de l'accélération $\overrightarrow{a_G}$ du point G dans la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

5) Appliquer le Théorème de la résultante dynamique à la tartine de centre de masse G et de masse m, projeter sur les vecteurs $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$, et déterminer T et N en fonction de m, g, a, e et θ.

6) Calculer $\dfrac{e^2}{a^2 + 4e^2}$ sachant que $a = 4\ cm$ et $e = 0,4\ cm$.

En déduire les expressions simplifiées de T et de N en fonction de m, g, et θ.

7) On admettra que l'absence de glissement correspond à la condition : $| T | \leq f | N |$ avec f le coefficient de frottement table/tartine. La tartine peut-elle quitter le coin de la la table sans glisser ?

8) Comme le coefficient de frottement table/tartine f vaut à peu près 1, montrer que la tartine commence à glisser à partir de l'angle $\theta_0 = \frac{\pi}{4}\ rad$?

■ *À partir de cet instant pris comme origine du temps, la tartine quitte la table en un temps très bref et se trouve alors en chute libre, conservant à l'instant $t = 0^+$ quasiment la même orientation θ_0 et la même vitesse angulaire $\dot{theta}_0$.*

9) Établir l'expression littérale de $\dot{\theta}_0 = \left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)(0)$ et vérifier que $\dot{\theta}_0 \simeq 6,43\ rad.s^{-1}$

■ *On néglige les frottements de l'air. On admet pour la suite du problème que G reste dans un plan vertical et que la vitesse de angulaire $\dot{\theta}$ reste constante. Conditions initiales : On considérera que la hauteur h de la table est évidemment nettement supérieure aux dimensions de la tartine et que la vitesse initiale de la tartine est très faible devant sa vitesse finale : $\dot{z}_G(0) \simeq 0$ et $z_G(0) \simeq h$.*

10) Quelle est, après avoir quitté la table, la loi d'évolution de $z_G(t)$ en supposant que la tartine ne retouche plus la table ?

11) Déterminer la durée de chute τ de la tartine beurrée.

12) Quel est l'angle $\theta(\tau)$ dont a tourné la tartine lorsqu'elle touche le sol ? Expression littérale et Application numérique pour $h = 70\ cm$.

13) De quel côté tombe donc la tartine, si on suppose qu'il n'y a pas de rebond ?

14) Des astronautes prennent leur petit-déjeuner sur la Lune avec des tartines et une table identique. De quel côté tombent les tartines ?

II Satellites artificiels de la Terre

Le mouvement des satellites artificiels de la Terre est étudié **dans le référentiel géocentrique** *$\mathcal{R}_G$ supposé galiléen. Ce référentiel a pour origine le centre O de la Terre (supposée à symétrie sphérique) et ses axes sont orientés dans la direction de trois étoiles éloignées fixes. Dans le référentiel géocentrique, la Terre tourne autour de son axe avec une période de révolution T et une vitesse angulaire Ω.*

On désignera par M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre. $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle.

Données : $T = 86\,164\ s$; $M_T = 5,98.10^{24}\ kg$; $R_T = 6\,370\ km$; $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$.

Un satellite artificiel M de masse m est en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. Les frottements dus à l'atmosphère sur le satellite sont négligés.

1) Montrer qu'un satellite artificiel en orbite circulaire autour de la Terre a nécessairement une trajectoire plane contenant le centre O de la Terre.

2) Démontrer que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme et exprimer littéralement sa vitesse v_0. On exprimera d'abord v_0 en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r, puis en fonction de g_0, R_T et r, où g_0 désigne l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la Terre.

3) Le satellite **SPOT** (Satellite sPécialisé dans l'Observation de la Terre) est en orbite circulaire à l'altitude $h = 832\ km$ au-dessus de la Terre. Calculer numériquement la vitesse v_0 de **SPOT** sur son orbite.

4) L'origine de l'énergie potentielle gravitationnelle est choisie nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du satellite autour de la Terre en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, r et m.

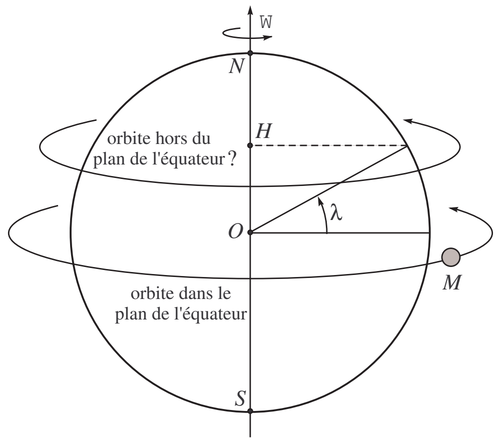
5) Pour les satellites en orbite basse, les frottements dus à l'atmosphère ne sont pas négligeables au fil du temps. Quel est l'effet des forces de frottements de l'atmosphère sur le rayon de la trajectoire et sur la vitesse d'un tel satellite ?

6) Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du satellite immobile à la surface de la Terre en un point de latitude λ en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, m, R_T, λ et de la période T de rotation de la Terre autour de l'axe Sud-Nord.

7) Pourquoi lance-t-on préférentiellement les satellites depuis les régions de basse latitude (Kourou en Guyane française : latitude 5° Nord ; Cap Canaveral en Floride : latitude 28° Nord). Les lance-t-on plutôt vers l'Est ou vers l'Ouest ?

8) Calculer la vitesse v_0 (toujours dans le référentiel géocentrique) d'un satellite immobile sur une base de lancement qui serait située au niveau de l'Équateur.

■ *Un satellite artificiel de la Terre est* **géostationnaire** *s'il est immobile dans le référentiel terrestre : son orbite est circulaire, il survole constamment le même point de la surface de la Terre.*
Le satellite TELECOM *de masse $m_s = 1\ t$ est en orbite circulaire dans le plan de l'équateur. Il est géostationnaire .*



9) Peut-on placer un satellite géostationnaire en orbite en dehors du plan de l'équateur ?

10) Établir la troisième loi de Képler pour un satellite en orbite circulaire. En déduire la l'altitude h_G (ou distance au sol) d'un satellite géostationnaire.

11) Calculer la vitesse v_G et l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{mG}$ du satellite TELECOM sur son orbite géostationnaire.

III Spectrographe de masse

Données :
$\mid U \mid = 1,0.10^4\ V$ $\qquad d = 1,0\ m$ $\qquad e = 1,6.10^{-19}\ C$
$1\ u$ (unité de masse atomique) $= 1,67.10^{-27}\ kg$
masse d'un nucléon : $1\ u$
$E_1 = 5,3.10^4\ V.m^{-1}$ $\qquad B_1 = 0,383\ T$ $\qquad B_2 = 0,200\ T$

Dans tout l'exercice, on étudiera le mouvement de différents ions dans des champs électriques et des champs magnétiques statiques et uniformes. On négligera les effets de la pesanteur devant les autres actions, ainsi que, dans la masse des ions, la masse des électrons qu'ils contiennent.
Le schéma du dispositif étudié est présenté en **annexe**.
On considère des plaques P_1 et P_2 parallèles entre elles, situées à une distance d l'une de l'autre. Une différence de potentiel U constante est appliquée entre P_1 et P_2.

■ *Des ions positifs de masse m et de charge q sont émis par une source (située en* **F**$_1$*), normalement à la plaque P_1, avec une vitesse initiale considérée comme nulle.*

1) Préciser qualitativement quelle est la plaque de potentiel le plus élevé et représenter sur le schéma (**annexe à rendre avec la copie**), le vecteur champ électrique $\overrightarrow{E}$.

2) Établir l'expression littérale de la vitesse v_0 des ions quand ils arrivent sur la plaque P_2. Calculer v_0 si $q = e$ et $m = 250\ u$.

■ *La source émet maintenant, toujours avec une vitesse initiale nulle, des ions positifs de mercure, ${}^{200}_{80}Hg^{2+}$ et ${}^{202}_{80}Hg^{2+}$.*

3) Calculer numériquement les vitesses v_1 et v_2 de ces deux types d'ions quand ils atteignent la plaque P_2.

■ *Ces ions traversent ensuite la plaque P_2 par la fente* **F**$_2$*, le vecteur vitesse des ions étant orthogonal à P_2. Ils pénètrent dans l'espace séparant P_2 et P_3, où règnent :*
- un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E_1}$, dans le plan de la feuille et parallèle à P_2 et P_3 ;
- un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B_1}$, perpendiculaire au plan de la feuille.

4) Démontrer que seuls parviennent au point **F**$_3$ (situé dans le prolongement de **F**$_1$ et **F**$_2$), les ions dont la vitesse est $v = \dfrac{E_1}{B_1}$. Préciser l'isotope du mercure qui remplit cette condition.

■ *La valeur de $\overrightarrow{B_1}$ restant constante, on règle la valeur de $\overrightarrow{E_1}$ pour permettre le passage à travers* **F**$_3$ *successivement des ions $^{200}_{80}Hg^{2+}$ et $^{202}_{80}Hg^{2+}$. Au-dessous de* **F**$_3$*, les ions pénètrent dans une région où ne règne qu'un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B_2}$, normal au plan de la feuille.*

5) Indiquer, en justifiant la réponse, quel doit être le sens de $\overrightarrow{B_2}$ pour que les ions puissent atteindre le point **O**$_1$ ou le point **O**$_2$ (entrées des collecteurs C_1 et C_2). Indiquer clairement ce sens sur le schéma.

6) Montrer que le mouvement d'un ion dans cette région est uniforme.

7) Démontrer que la trajectoire des ions est un cercle. Vérifier que le rayon R_1 de ce cercle, pour les ions $^{200}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ (msse m_1, charge q_1, vitesse v_1) est : $R_1 = \dfrac{m_1 v_1}{q_1 B_2}$

8) Déterminer le collecteur (C_1 ou C_2) qui reçoit les ions $^{200}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$.

9) Calculer numériquement la distance δ qui sépare les deux points d'impact **O**$_1$ et **O**$_2$.

10) Compléter le schéma fourni en annexe en faisant apparaître les trajectoires empruntées par chacun de deux ions. Pour un ion $^{200}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ en une position quelconque sur sa trajectoire circulaire, on prendra soin de faire apparaître les vecteur vitesses $\overrightarrow{v}$ ainsi que la force magnétique $\overrightarrow{F_m}$.

11) Les quantités d'électricité reçues en une minute par les collecteurs C_1 et C_2 sont respectivement $Q_1 = +1,20.10^{-7}\ C$ et $Q_2 = +3,5.10^{-8}\ C$.
Déterminer la composition du mélange d'ions, c'est à-dire :
- les nombres N_1 et N_2 d'ions arrivés correspondant
- ainsi que les pourcentages correspondants en $^{200}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ et $^{202}_{80}\mathrm{Hg}^{2+}$ du mélange d'ions.

IV Solvants et forces intermoléculaires

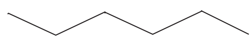
■ *Pour chacun des trois solvants suivants, préciser si le solvant est polaire et/ou protique :*

1) L'hexane : C_6H_{14}.

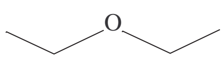
2) L'éthoxyéthane : $C_2H_5OC_2H_5$

3) L'acide éthnanoïque : CH_2COOH.

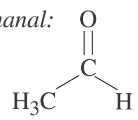
1) *Hexane:*



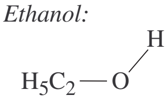
2) *Ethoxyéthane:*



4)
Ethanal:



Ethanol:



■ *Justifier les valeurs relatives de températures d'ébullition pour les groupes de solvants suivants :*

4) éthanal ($T_{\text{éb}} = 20\ °C$) et éthanol ($T_{\text{éb}} = 79\ °C$) ;

5) méthane CH_3 ($T_{\text{éb}} = -162\ °C$), éthane C_2H_6 ($T_{\text{éb}} = -89\ °C$) et propane C_3H_8 ($T_{\text{éb}} = -42\ °C$) ;

6) HF ($T_{\text{éb}} = 19,5\ °C$), HCl ($T_{\text{éb}} = -85,1\ °C$), HBr ($T_{\text{éb}} = -66,8\ °C$) et HI ($T_{\text{éb}} = -35,1\ °C$).

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

NOM / Prénom :

Code Copie :