➤ Correction DS n°5

I Équilibre

1) Le système $\{M, m\}$, étudié dans le référentiel terrestre considéré galiléen, est soumis à son poids $m\overrightarrow{g}$, à force de rappel du ressort $\overrightarrow{F_r}$ et à la réaction $\overrightarrow{R}$ du support, uniquement radiale puisque les frottements sont négligés.
Le théorème de l'énergie mécanique donne :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_m = \delta W_{\mathsf{NC}} = \delta W(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{R}\,.\,\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_m = \mathsf{Cte}} \text{ (système conservatif)}$$

2) • Le poids dérive de l'énergie potentielle de pesanteur (verticale ascendante) :
$\mathcal{E}_{p_g} = mgz + \mathsf{Cte} = -mgR\cos\theta + \mathsf{Cte}$
• La force de rappel du ressort dérive de l'énergie potentielle élastique (avec $l_0 = R$) :
$\mathcal{E}_{p_{\text{élas}}} = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + \mathsf{Cte} = \frac{1}{2}k(R + R\sin\theta - l_0)^2 + \mathsf{Cte} = \frac{1}{2}kR^2\sin^2\theta + \mathsf{Cte}$
• Donc, avec l'origine de l'énergie potentielle prise pour $\theta = 0$:

$$\boxed{\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p_g} + \mathcal{E}_{p_{\text{élas}}} = mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}kR^2\sin^2\theta}$$

3) • Les positions d'équilibre correspondent aux valeurs θ_e telles que $\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta_e} = 0$
Or, avec $\alpha = \frac{mg}{kR}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta} = mgR.\sin\theta + kR^2\cos\theta.\sin\theta = kR^2\sin\theta\left(\frac{mg}{kR} + \cos\theta\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_p = kR^2\sin\theta(\alpha + \cos\theta)}$$

• On en déduit :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta_e} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin\theta_e = 0 & \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{e1} = 0} \quad \text{ou} \quad \boxed{\theta_{e3} = \pi} \\ \text{ou, lorsque } \boxed{\alpha < 1} : & \\ \alpha + \cos\theta_e = 0 & \Rightarrow \quad \boxed{\theta_{e2} = \arccos(-\alpha)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\theta_{e4} = -\arccos(-\alpha)} \end{cases}$$

4) On a : $\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2} = kR^2(\alpha\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta)$
• $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}(\theta_{e1}) = kR^2(\alpha + 1) > 0$
• $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}(\theta_{e3}) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}(\theta_{e4}) = -kR^2\sin^2\theta < 0$ puisque $\cos\theta_{e3} = \cos\theta_{e4} = -\alpha$ dans le cas où $\alpha < 1$
• $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}(\theta_{e2}) = kR^2(-\alpha + 1) \begin{cases} < 0 & \text{équilibre } \textbf{instable} \quad \text{si } \alpha > 1 \\ > 0 & \text{équilibre } \textbf{stable} \quad \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$

	$\theta_{e1} = 0$	$\theta_{e2} = \arccos(-\alpha)$	$\theta_{e3} = \pi$	$\theta_{e4} = -\theta_{e2}$
$\alpha > 1$	**stable**	–	**instable**	–
$\alpha < 1$	**stable**	**instable**	**stable**	**instable**

5) • $\mathcal{E}_p(\theta) = \cancel{\mathcal{E}_p(\theta_{e1})} + \cancel{\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta_{e1}}}(\theta - \theta_{e1}) + \left(\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta_{e1}}\frac{(\theta-\theta_{e1})^2}{2} = \mathcal{E}_p(\theta) = \frac{1}{2}kR^2(\alpha+1)\theta^2$

• L'énergie mécanique s'écrit alors, pour les petites oscillations autour de la position $\theta_{e1} = 0$:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}kR^2(\alpha+1)\theta^2 \quad \Rightarrow \quad \cancel{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t}} = mR^2.\ddot{\theta}.\dot{\theta} + kR^2(\alpha+1).\dot{\theta}.\theta$$

• En simplifiant par $\dot{theta}$ (on étudie le mouvement, donc $\dot{\theta} \neq 0$), on trouve l'équation du mouvement qui est celle d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{m}(\alpha+1).\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0} \quad \text{avec : } \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}(\alpha+1)}}$$

Les oscillations sont sinusoïdales, de période $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k(\alpha+1)}} = 2\pi\sqrt{\frac{mR}{mg+kR}}}$

II Densimètre

1) Puisque la densité du densimètre est $d_0 = \frac{\rho_{\text{densimètre}}}{\rho_0}$, on en déduit sa masse :

$$\boxed{m = \rho_{\text{densimètre}}.v = d_0\rho_0.v}$$

2) Le volume de fluide déplacé est $v_f = v - sh$. La poussée d'Archimède s'écrit donc :

$$P = m_f.g = \rho v_f.g = \rho(v-sh)g \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = d\rho_0(v-sh)g}$$

3) À l'équilibre, dans le référentiel terrestre, le poids du densimètre est compensé par la poussée d'Archimède qui s'exerce sur lui :

$$m.g = P \quad \Rightarrow \quad d_0\cancel{\rho_0}.v.\cancel{g} == d\cancel{\rho_0}.(v-sh).\cancel{g} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \frac{d_0 v}{v-sh} = \frac{d_0}{1-\frac{h}{H}}} \quad \text{avec : } \boxed{H = \frac{v}{s}}$$

4) Puisque $0 < h < h_M$:

$$0 < \frac{h}{H} < \frac{h-M}{H} \quad \Leftrightarrow \quad 1 > 1-\frac{h}{H} > 1-\frac{h_M}{H} \quad \Leftrightarrow \quad 1 < \frac{1}{1-\frac{h}{H}} < \frac{1}{1-\frac{h_M}{H}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{d_0 < d < \frac{d_0}{1-\frac{h_M}{H}}}$$

III Navire à moteur

• On travaille sur le centre de masse du navire $\{G, m\}$, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
• Le système, de vitesse $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} = v\overrightarrow{e_x}$ est soumis à :
- son poids $m\overrightarrow{g}$
- la poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_A} = -m_f\overrightarrow{g}$
- la force de frottement fluide à grande vitesse : $\overrightarrow{f} = -kv^2\overrightarrow{e_x}$
- la force motrice $\overrightarrow{F_m} = F_m\overrightarrow{e_x}$
• Initialement la vitesse $v = v_0 = 15$ nœuds $= 15$ mille nautique$/h = 15.1582\ m.h^{-1} = 27,8\ km/h = 7,72\ m.s^{-1}$

1) Le théorème de la puissance cinétique donne, puisque $\mathcal{E}_j = \frac{1}{2}mv_0^2 = \text{Cte}$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_k}{\mathrm{d}t} = \begin{cases} \mathcal{P}(\overrightarrow{F_{\text{ext}}}) = (m-m_f)\overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{v} + \overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{v} + \overrightarrow{F_m}\cdot\overrightarrow{v} = -kv_0^3 + \mathcal{P} \\ 0 \end{cases}$$

Soit : $\boxed{k = \frac{\mathcal{P}}{v_0^3} = 10\,900\ kg.m^{-1}}$ car $uSI(k) = uSI\left(\frac{f}{v^2}\right) = \frac{kg.m.s^{-2}}{m^2.s^{-2}} = kg.m^{-1}$

2) À partir du moment où le navire stoppe les machines, la force motrice s'annule et seule la force de frottement fourni un travail (résistant) au système, qui voit son énergie cinétique (et

donc sa vitesse) diminuer (d'après le théorème de l'énergie cinétique).
Le PFD s'écrit :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - m_f\vec{g} - kv^2\vec{e_x} \xrightarrow[\text{selon } \vec{e_x}]{\text{en projection}} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = -\frac{k}{m}.\mathrm{d}t$$

On initialise le temps à l'instant où les machines s'arrêtent et on intègre entre $t = 0$ (à l'abscisse x_0, où la vitesse est v_0) et l'instant $t > 0$ (à l'abscisse x, où la vitesse est v), après avoir posé $\boxed{\delta = \frac{m}{k}}$:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = \int_0^t -\frac{\mathrm{d}t}{\delta} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -\frac{t-0}{\delta} \quad (\star) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{v_0.\delta}{\delta + v_0.t}}$$

3) • Puisque $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, on peut calculer : $\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t \frac{v_0.\delta}{\delta + v_0.t}.\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad x - x_0 = \delta\Big[\ln(\delta + v_0.t)\Big]_0^t$

• En notant $v_P = \frac{v_0.\delta}{\delta + v_0.T}$ la vitesse du navire lorsqu'il arrive au niveau de l'entrée du port, $T = t_P - 0$ la durée de parcours de la distance $X = x_P - x_0$ entre la position initiale et l'entrée du port :

$$\boxed{X = \delta\ln\left(\frac{\delta + v_0.T}{\delta}\right)} \quad \Rightarrow \quad X = \delta\ln\left(\frac{\delta + v_0.T}{v_0.\delta}.\frac{v_0.\cancel{\delta}}{\cancel{\delta}}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{X = \delta\ln\left(\frac{v_0}{v_P}\right) = 1,85\ km}$$

4) D'après $(\star)$ (question **2)**), puisque $t = \delta\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right)$, on peut écrire :

$$\boxed{T = \delta.\left(\frac{1}{v_P} - \frac{1}{v_0}\right) = \frac{10^4.10^3}{10\,900}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{15}\right).\frac{3\,600}{1\,852} = 774\ s \simeq 13\,\mathrm{min}}$$

5) Puisque, d'après **3)**, $X' = \delta\ln\left(\frac{v_P}{v_Q}\right)$, on a :

$$\boxed{v_Q = v_P.\exp\left(-\frac{X'}{\delta}\right) = 2\ \text{nœuds}.\exp\left(-\frac{1\,852}{2}.\frac{10\,900}{10^4.10^3}\right) = 0,730\ \text{nœuds} = 0,38\ m.s^{-1}}$$

6) Pour stopper le navire, on allume à nouveau les moteurs en mode « machine arrière »(les hélices tourne dans le sens inverse au sens nécessaire pour aller de l'avant).

IV Viscosimètre à chute verticale

1.1) Un référentiel **galiléen** est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié, c'est-à-dire dans lequel un point matériel isolé (ou pseudo-isolé) a un mouvement rectiligne uniforme.

1.2) $\boxed{uSI(\eta) = kg.m^{-1}.s^{-1}}$ puisque $[\eta] = \frac{[f]}{[6\pi rv]} = \frac{MLT^{-2}}{L \times LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}$

1.3) Les trois forces qui s'appliquent sur la bille sont le poids ($m\vec{g}$), la poussée d'Archimède ($\vec{F_A}$) et la force de frottement fluide ($\vec{f}$)

1.4) $\boxed{m\vec{g} = \frac{4}{3}\pi r^3.\rho_1.g\,\vec{i}}$ $\boxed{\vec{F_A} = -m_f\vec{g} = -\frac{4}{3}\pi r^3.\rho_2.g\,\vec{i}}$ $\boxed{\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v} = -6\pi\eta rv\,\vec{i}}$

1.5) Schéma avec $\| m\vec{g} \| > \| \vec{F_A} \| + \| \vec{f} \|$

2.1) Le PFD dans le référentiel terrestre s'écrit : $m\vec{a} = (m - m_f)\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{v}$, soit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{m - m_f}{m}\right)\vec{g} - \frac{6\pi\eta r}{m}\vec{v} \xrightarrow[\text{selon } \vec{i}]{\text{en projection}} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}g - \frac{9\eta}{2r^2\rho_1}.v$$

Soit : $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A + Bv}$ avec : $\boxed{A = \dfrac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}.g}$ et $\boxed{B = -\dfrac{9\eta}{2r^2\rho_1}}$ **2.2)** $\boxed{A = 8,24\ m.s^{-2}}$

3.1) On repère les positions successives correspondantes aux différentes dates des prises de vue et on calcule $v \simeq \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$: $\boxed{v(t_k) \simeq \dfrac{x(t_{k+1}) - x(t_{k-1})}{t_{k+1} - t_{k-1}}}$

3.2) Graphiquement, la **vitesse limite** et le **temps caractéristique** sont :

- $\boxed{v_{\text{lim}} \simeq 43\ cm.s^{-1}}$ (valeur asymptotique de la vitesse)
- et $\boxed{\tau \simeq 60\ ms}$ (date à laquelle la tangente à la courbe en l'origine intercepte l'asymptote)

3.3) Puisque $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - Bv = A$, on a : $v = v_P + v_G = -\dfrac{A}{B} + K\exp(Bt)$

Comme $v_{(t=0)} = 0 = -\dfrac{A}{B} + K$, on conclut :

$$\boxed{v = v_{\text{lim}}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) = -\frac{A}{B}(1 - \exp(Bt)) = \frac{(\rho_1 - \rho_2)g.2r^2}{9\eta}\left(1 - \exp\left(-\frac{9\eta}{2r^2\rho_1}t\right)\right)}$$

Soit : $\boxed{v_{\text{lim}} = -\dfrac{A}{B}}$ et $\boxed{\tau = -\dfrac{1}{B}}$

3.4) • $\boxed{\eta = \dfrac{(\rho_1 - \rho_2)g.2r^2}{9v_{\text{lim}}} = 0,837\ kg.m^{-1}.s^{-1}}$ • $\dfrac{\Delta\eta}{\eta_{\text{th}}} = \dfrac{\eta - \eta_{\text{th}}}{\eta_{\text{th}}} = \dfrac{0,837 - 0,830}{0,830} \simeq 1\%$

• $[Pa.s] = [\text{Pression.Temps}] = \dfrac{[\text{Force}]}{[\text{Surface}]}.T = \dfrac{MLT^{-2}}{L^2}.T = ML^{-1}T^{-1}$

$\Rightarrow$ $\boxed{1\ Pa.s = 1\ kg.m^{-1}.s^{-1}}$

3.5) • La vitesse devient constante à partir de la date $\boxed{t_1 \simeq 300\ ms}$.
• On cherche la position de la bille correspondante.
Il faut intégrer la vitesse pour obtenir $x(t)$: $v = v_{\text{lim}}\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

$$\Rightarrow \quad x = v_{\text{lim}}.\left(t - \int \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).\mathrm{d}t\right) = v_{\text{lim}}.\left(t + \tau.\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) + \text{Cte}$$

Comme à $t = 0$, $x(0) = 0 = v_{\text{lim}}.\tau + \text{Cte}$, on en déduit : $\boxed{x(t) = v_{\text{lim}}.\left[t + \tau.\left(\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) - 1\right)\right]}$

• On calcule : $\boxed{x(t_1) \simeq 10\ cm}$
Il s'agit d'une faible distance : le régime transitoire sera **difficilement observable**.

3.6) Protocole pour mesurer la viscosité d'un liquide à partir d'une seule mesure de vitesse : on place un capteur de vitesse à une distance adaptée ($x \geq 30\ cm$) pour être certain de mesurer la vitesse limite, laquelle permet d'en déduire le coefficient de viscosité (cf. **3.4)**).

4.1) $\boxed{W(m\vec{g}) = -\Delta\mathcal{E}_{p_g} = -(-mgx_C + mgx_0) = \dfrac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g x_C = 6,06\ mJ}$

et $\boxed{W(\vec{F_A}) = W(-m_f\vec{g}) = +\Delta\mathcal{E}_{p_g} = -m_f g x_C + m_f g x_0 = -\dfrac{4}{3}\pi r^3\rho_2 g x_C = -0,97\ mJ}$

4.2) Le théorème de l'énergie cinétique : $\dfrac{1}{2}mv_C^2 - \cancel{\dfrac{1}{2}mv_0^2} = W(m\vec{g}) + W(\vec{F_A}) + W(\vec{f})$

$\Rightarrow$ $\boxed{W(\vec{f}) = \dfrac{1}{2}mv_C^2 - W(m\vec{g}) - W(\vec{F_A}) = -5,09\ mJ}$